Passeios Aleatórios, Martingais e Cadeias de Markov

Diogo Almeida

Dezembro 2025

Um pouco sobre mim

- Diogo Almeida
- Vivo na Maia
- 2º ano de matemática na FCUP

Passeios Aleatórios

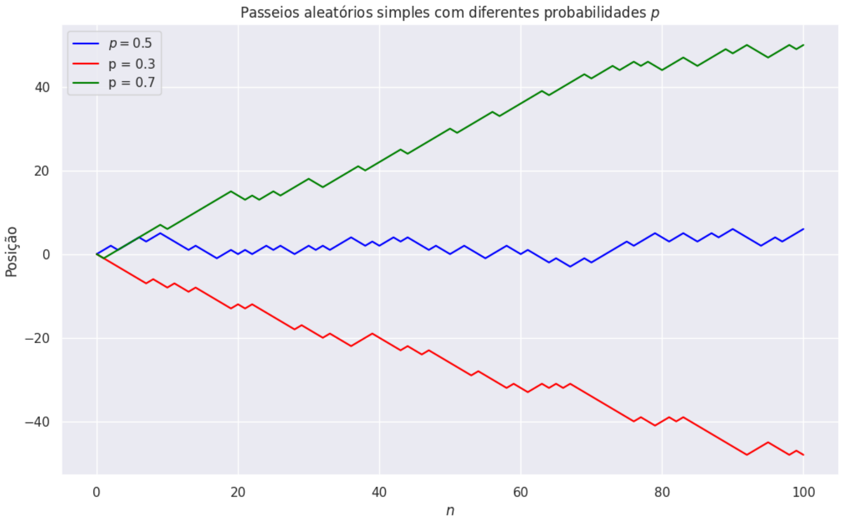
Seja $p \in (0,1)$ e $Z_1, Z_2, \ldots$ variáveis aleatórias tal que

- $\mathbb{P}(Z_i = 1) = p$
- $\mathbb{P}(Z_i = -1) = 1 - p$

$$X_n = a + Z_1 + \cdots + Z_n$$

é um processo estocástico chamado de Passeio Aleatório Simples [1].

Passeios Aleatórios



Passeios Aleatórios

Distribuição de X_n se $a = 0$:

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}} \text{ , } n + k \text{ é par, } -n \leq k \leq n$$
$$\mathbb{P}(X_n = k) = 0 \text{ nos outros casos.}$$

Martingais

Dado um processo estocástico $X_1, X_2, X_3, \ldots$ tal que $\mathbb{E}|X_n| < \infty$. Se

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|X_1, X_2, \ldots X_n) = X_n$$

Então $\{X_n\}$ é um exemplo de martingal [1].

Martingais

Exemplo (Passeio Aleatório é um martingal)

Vamos recordar: $X_n = a + Z_1 + Z_2 + \ldots Z_n$

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|X_1, \ldots, X_n) =$$
$$= \mathbb{E}(a + Z_1 + Z_2 + \ldots Z_n + Z_{n+1}|X_1, \ldots, X_n) =$$
$$= a + Z_1 + Z_2 + \ldots Z_n + \mathbb{E}(Z_{n+1}) = X_n + p - (1-p) = X_n + 2p - 1$$

Se $p = \frac{1}{2}$, *então a última parcela desparece e temos a igualdade de martingais.*

O que acontece se $p \neq \frac{1}{2}$?

Martingais

Submartingais:

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|X_1, X_2, \ldots X_n) \geq X_n$$

Supermartingais:

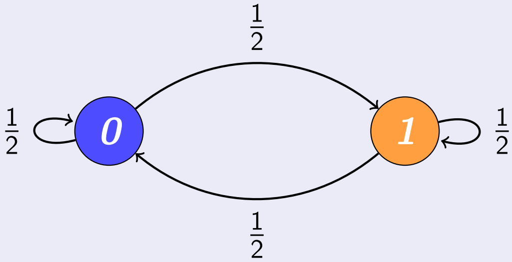
$$\mathbb{E}(X_{n+1}|X_1, X_2, \ldots X_n) \leq X_n$$

Estes conceitos têm várias aplicações e surgiram em teoria de jogos.

Cadeias de Markov

Uma cadeia de Markov é caracterizada por um espaço de estados contável S, pela distribuição inicial $\{\nu\}_{i \in S}$ $(\sum_{i \in S} \nu_i = 1,\ \nu_i \geq 0)$. E também pelas probabilidades de transição p_{ij} $(\sum_{j \in S} p_{ij} = 1,\ p_{ij} \geq 0)$. [1]

Exemplo



Cadeias de Markov

- ν_i : Probabilidade de começar em i;
- p_{ij} : Estando em i, probabilidade de passar para j (não depende do tempo);

$$\mathbb{P}(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = \nu_{i_0} \prod_{j=1}^{n} p_{i_{j-1} i_j} = \nu_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \ldots$$

Também podemos usar a probabilidade condicionada para descrever cadeias de Markov:

$$\mathbb{P}(X_n = j | X_{n-1} = i) = p_{ij}$$

Cadeias de Markov

Exemplo (Passeio Aleatório é uma cadeia de markov)

- $S = \mathbb{Z}$ *(contável)*
- $\nu_a = 1$, $\nu_i = 0$ *se* $i \neq a$. $(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \nu_i = 1)$
- $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = 1 - p$, *de resto* $= 0$ $(\sum_j p_{ij} = 1)$

Aplicações

Estes temas da teoria da probabilidade têm diversas aplicações (finanças, genética, física estatística, mecânica estatística, atuária, seguros, jogos, etc).

Referências

J.S. Rosenthal.
First Look At Rigorous Probability Theory, A (2nd Edition).
World Scientific Publishing Company, 2006.