Contagem de Semigrupos Numéricos e a sua Relação com Grafos

Dinis Ferreira Ribeiro

FCUP

13/12/2025

U.PORTO
FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

Um semigrupo numérico S é um subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que:

- $0 \in S$;
- S é estável para a soma;
- $\mathbb{N} \setminus S$ é finito.

Exemplos:

- $S_1 = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$ é um semigrupo numérico;
- $S_2 = \{0, 3, 4, 6, 7, 8, \ldots\}$ é um semigrupo numérico;
- $S_3 = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, \ldots\}$ *não* é um semigrupo numérico;

Denota-se por $\mathbb{S}$ o conjunto dos semigrupos numéricos.

Se $A \subseteq \mathbb{N}$, denota-se <A> pelo conjunto das combinações lineares dos elementos de A com coeficientes em $\mathbb{N}$. Se <A> $=$ S, diz-se que A gera S. Exemplos:

- $S_1 = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, ...\} =< 2, 3 >$;
- $S_2 = \{0, 3, 4, 6, 7, 8, ...\} =< 3, 4 >$.

Todo o semigrupo numérico é gerado por um *único* conjunto de geradores *minimal* para a inclusão, do qual os elementos se designam por geradores minimais ou elementos primitivos e o maior destes por primitivo máximo.

A um semigrupo numérico S associam-se alguns *invariantes*. Os mais comuns são:

- o menor inteiro positivo em S, denotado por m(S) e denominado pela multiplicidade de S;
- o maior inteiro positivo em $\mathbb{N}\backslash$S, denotado por F(S) e denominado pelo número de Frobenius de S;
- a cardinalidade de $\mathbb{N}\backslash$S, denotado por g(S) e denominado por género de S;

Exemplos:

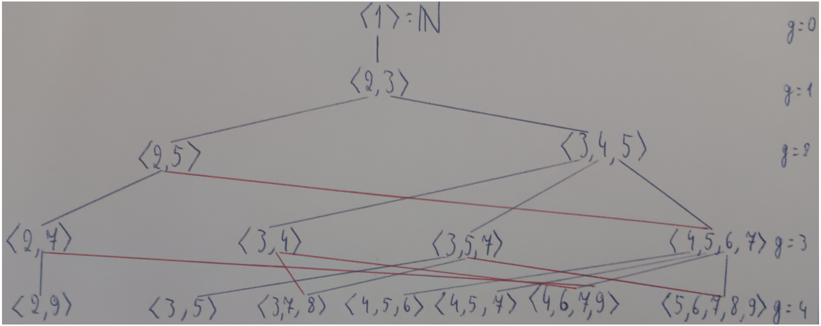
- Para $S_1 = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$ tem-se que m$(S_1) = 2$, F$(S_1) = 1$ e g$(S_1) = 1$;
- Para $S_2 = \{0, 3, 4, 6, 7, 8, ...\}$ tem-se que m$(S_2) = 3$, F$(S_2) = 5$ e g$(S_2) = 3$;

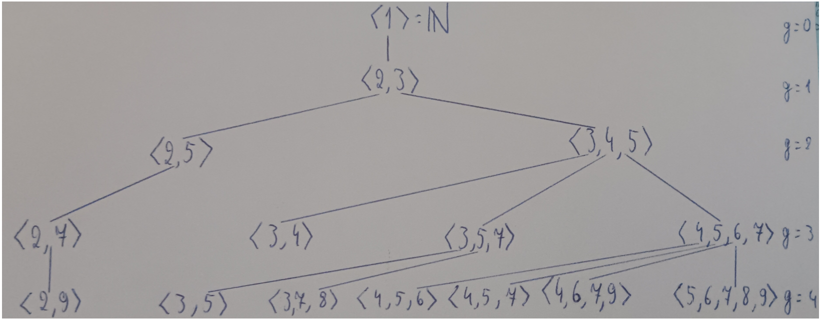
Os elementos primitivos de um semigrupo númerico S dizem-se esquerdos ou direitos, respetivamente, se forem menores ou maiores do que F(S).

A cada invariante apresentado associa-se uma partição de $\mathbb{S}$. Por exemplo, denotando por $\mathscr{G}_n$ o conjunto dos semigrupos numéricos de género $n \in \mathbb{N}$, então $\{ \mathscr{G}_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma *partição* de $\mathbb{S}$.
Obtém-se, ainda, uma sucessão númerica associada, por exemplo, $(n_g)_{g\in\mathbb{N}}$, fazendo $n_g = \# \mathscr{G}_g$, $\forall g \in \mathbb{N}$.
Designa-se o estudo destas sucessões por contagem de semigrupos numéricos.
Acerca da contagem de semigrupos numéricos por género, foi provado que $\lim\limits_{g\to\infty} \frac{n_{g-1}+n_{g-2}}{n_g} = 1$ e conjetura-se que $(n_g)_{g\in\mathbb{N}}$ seja crescente.

1. Semigrupos Numéricos
2. Grafo dos Semigrupos Numéricos e Árvores Geradoras

Constrói-se o *grafo dos semigrupos numéricos* considerando $\mathbb{S}$ como o conjunto dos vértices e ligando dois semigrupos se um puder ser obtido do outro por remoção de um gerador minimal.
Uma *árvore geradora* deste grafo (a *única* que aparece na literatura) é a que se obtém ligando dois semigrupos númericos se um puder ser obtido do outro por remoção de um primitivo direito, ou seja, por adição do número de Frobenius.
O objetivo do meu projeto é considerar árvores geradoras do grafo dos semigrupos numéricos diferentes da usual e obter informação sobre as *sucessões numéricas* associadas às invariantes.


⟨1⟩ = ℕ
g = 0
⟨2,3⟩
g = 1
⟨2,5⟩
⟨3,4,5⟩
g = 2
⟨2,7⟩
⟨3,4⟩
⟨3,5,7⟩
⟨4,5,6,7⟩
g = 3
⟨2,9⟩
⟨3,5⟩
⟨3,7,8⟩
⟨4,5,6⟩
⟨4,5,7⟩
⟨4,6,7,9⟩
⟨5,6,7,8,9⟩
g = 4


⟨1⟩ = ℕ
g = 0
⟨2,3⟩
g = 1
⟨2,5⟩
⟨3,4,5⟩
g = 2
⟨2,7⟩
⟨3,4⟩
⟨3,5,7⟩
⟨4,5,6,7⟩
g = 3
⟨2,9⟩
⟨3,5⟩
⟨3,7,8⟩
⟨4,5,6⟩
⟨4,5,7⟩
⟨4,6,7,9⟩
⟨5,6,7,8,9⟩
g = 4

Obrigado pela atenção!