Sistemas dinâmicos em bilhares planos

Daniel Costa

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Tutora: Helena Reis

13/12/2025

Definição de bilhar

Definição

Seja C uma curva parametrizada por $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ contínua. Dizemos que C é uma curva de Jordan se:

- γ é injetiva em $[a, b[$;
- $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Definição de bilhar

Definição

Seja C uma curva parametrizada por $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ contínua. Dizemos que C é uma curva de Jordan se:

- γ é injetiva em $[a, b[$;
- $\gamma(a) = \gamma(b)$.

O Teorema de Jordan garante que uma curva de Jordan em $\mathbb{R}^2$ divide o plano em duas regiões conexas - uma limitada e outra ilimitada.

Definição de bilhar

Definição

Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ uma curva de Jordan de classe C^1 e seja Γ a região conexa por ela limitada. O bilhar plano é dado pelo produto cartesiado da curva γ pelo intervalo $]0, \pi[\subseteq \mathbb{R}$, munido de uma aplicação T (chamada aplicação de bilhar) definida da seguinte forma. Temos que $T(p, \theta) = (q, \beta)$ se p, θ, q e β são tais que:

- $p \in \gamma([a, b])$
- seja v um vetor orientado para o interior de Γ, partindo do ponto p, e fazendo um ângulo θ com a reta tangente a γ em p (orientação contrária ao ponteiro dos relógios);
- $q \in \gamma([a, b])$, $q \neq p$, é o primeiro ponto de contacto com a curva γ seguindo a semi-reta com extremo em p e com direção v;
- β é definido pela através da reflexão com relação à reta normal a γ em q.

Definição de bilhar

Alternativamente, se γ é parametrizado pelo comprimento de arco, o bilhar fica identificado com $[a, b]\times]0, \pi[$, munido da aplicação

$$T : [a, b]\times]0, \pi[\to [a, b]\times]0, \pi[\,,$$

com $T(t, \theta) = (t', \theta')$, onde $p = \gamma(t)$, $q = \gamma(t')$ e $\theta, \theta' \in]0, \pi[$ são os ângulos θ e β definidos no slide anterior.

Propriedades da aplicação de bilhar

- A curva de Jordan de classe C^1 é condição necessária (mas não suficiente) para que a aplicação de bilhar seja contínua;

- A curva de Jordan de classe C^1 é condição necessária (mas não suficiente) para que a aplicação de bilhar seja contínua;
- Para que T seja contínua, precisamos exigir ainda que Γ seja **convexa**;

Propriedades da aplicação de bilhar

- A curva de Jordan de classe C^1 é condição necessária (mas não suficiente) para que a aplicação de bilhar seja contínua;
- Para que T seja contínua, precisamos exigir ainda que Γ seja **convexa**;
- Com estas hipóteses, temos que, se γ for de classe C^k, T é de classe C^{k-1}.

Propriedades da aplicação de bilhar

- A curva de Jordan de classe C^1 é condição necessária (mas não suficiente) para que a aplicação de bilhar seja contínua;
- Para que T seja contínua, precisamos exigir ainda que Γ seja **convexa**;
- Com estas hipóteses, temos que, se γ for de classe C^k, T é de classe C^{k-1}.
- A aplicação T é invertível, sendo a sua inversa T^{-1} também uma aplicação de bilhar. Além do mais, se $k \geq 2$, T e T^{-1} são de classe C^1 e, portanto, T é um diffeomorfismo.

Medidas Invariantes

Definição

Seja (E, Ω, μ) um espaço de medida. Dizemos que μ é invariante por T se:

$$\forall \beta \in \Omega, \quad \mu(\beta) = \mu(T^{-1}(\beta))$$

Medidas Invariantes

Definição

Seja (E, Ω, μ) um espaço de medida. Dizemos que μ é invariante por T se:

$$\forall \beta \in \Omega, \quad \mu(\beta) = \mu(T^{-1}(\beta))$$

Teorema

Seja (E, T) um bilhar. Então E admite uma medida μ finita que é invariante por T.

Medidas Invariantes

Definição

Seja (E, Ω, μ) um espaço de medida. Dizemos que μ é invariante por T se:

$$\forall \beta \in \Omega, \quad \mu(\beta) = \mu(T^{-1}(\beta))$$

Teorema

Seja (E, T) um bilhar. Então E admite uma medida μ finita que é invariante por T.

A medida invariante é dada nas coordenadas (t, θ) por:

$$\mu(B) = \iint_B sen(\theta)\, dt\, d\theta$$

onde $B \subseteq E$ é boreliano.

Consequência da existência da medida finita e invariante

Graças à existência de uma medida finita invariante para o bilhar, estamos em condições de aplicar o **Teorema da Recorrência de Poincaré**, cujo enunciado é o seguinte:

Consequência da existência da medida finita e invariante

Graças à existência de uma medida finita invariante para o bilhar, estamos em condições de aplicar o **Teorema da Recorrência de Poincaré**, cujo enunciado é o seguinte:

Teorema da Recorrência de Poincaré

Seja K um espaço métrico separável, $T : K \to K$ uma função mensurável e μ uma medida finita em K que é invariante por T. Então, quase todo o ponto $x \in K$ é recorrente, ou seja, temos:

$$\liminf_{n \to \infty} d(T^n(x), x) = 0$$

para quase todo o ponto $x \in K$