Espaços de Hilbert e Operadores Lineares Limitados

Apolo Gomes

Tutora : Lina Oliveira

Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa

Novos Talentos Gulbenkian, Lisboa

13 de Dezembro de 2025

Espaços de Hilbert

Definição

Seja (x_n) uma sucessão num espaço métrico X. Se para qualquer $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n, m > N \implies d(x_n, x_m) < \epsilon$$

então (x_n) é uma **sucessão de Cauchy**.

Se qualquer sucessão de Cauchy em X converge, então X é um espaço métrico **completo**.

- $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ são exemplos de espaços completos.
- $\mathbb{Q}$ não é um espaço completo.

Espaços de Hilbert

Definição

Seja H um espaço vetorial com produto interno. Se H for completo na norma induzida pelo produto interno, então H é um **espaço de Hilbert**.

- $\ell^2 = \{(x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ é um espaço de Hilbert com o produto interno:
$$\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$
- $c_{00} = \{(x_n) \in l^2 : \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n > N}\ x_n = 0\} \subset \ell^2$ não é um espaço de Hilbert.

Operadores Lineares Limitados

Definição

Sejam X, Y espaços vetoriais sobre um corpo K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), e seja $T : X \longrightarrow Y$ um operador. Se para quaisquer $\alpha, \beta \in K$ e $u, v \in X$

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha Tu + \beta Tv$$

então T é um **operador linear**.

Definição

Se X, Y forem espaços vetoriais normados, T for um operador linear e existir $c \in \mathbb{R}_0^+$ tal que

$$||Tx|| \leq c||x||$$

para todo o $x \in X$, então T é um **operador linear limitado**.

Operadores Lineares Limitados

Para qualquer operador linear limitado T,

$$||T|| := \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{||Tx||}{||x||}$$

define uma norma no espaço dos operadores lineares limitados.

- $P : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$, onde $P(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_1, 0, 0, ...)$, é um operador linear limitado com norma 1.
- $D : C^1[a, b] \longrightarrow C[a, b]$, onde $D(f) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, é um operador linear mas não é limitado.