**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**
**LMAC**

# Introdução à Geometria

Teste 2

21 de Janeiro de 2020 - 11h30

Duração: 1h30

1. Em $\mathbb{P}^2$ considere os pontos $P = [1:2:2]$, $Q = [3:1:4]$, $R = [1:3:1]$ e $S = [2:-1:2]$, e as rectas projectivas $\ell_1$, $\ell_2$, $\ell_3$ e $\ell_4$, definidas respectivamente pelas equações

$$\ell_1\colon\ x_2 = 0, \quad \ell_2\colon\ x_0 = 0, \quad \ell_3 : x_0 - 2x_1 = 0 \quad \text{e} \quad \ell_4 : 3x_1 - x_2 = 0.$$

(2 val.) a) Indique o ponto de intersecção de $\ell_4$ com a recta projectiva $\langle P, Q\rangle$.

**Solução:** A recta projectiva $r := \langle P, Q\rangle = \mathbb{P}\left(\mathcal{L}\{(1,2,2),(3,1,4)\}\right)$ é definida pela equação $6x_0 + 2x_1 - 5x_2 = 0$. Com efeito, um vector $(x_0, x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^3$ pertence ao espaço $\mathcal{L}\{(1,2,2),(3,1,4)\}$ se e só se

$$\text{car}\begin{bmatrix} 1 & 3 & x_0 \\ 2 & 1 & x_1 \\ 2 & 4 & x_2 \end{bmatrix} = \text{car}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

e, como

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & x_0 \\ 2 & 1 & x_1 \\ 2 & 4 & x_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & x_0 \\ 0 & -5 & x_1 - 2x_0 \\ 0 & -2 & x_2 - 2x_0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & x_0 \\ 0 & -5 & x_1 - 2x_0 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5}x_0 - \frac{2}{5}x_1 + x_2 \end{bmatrix},$$

temos que $[x_0 : x_1 : x_2] \in r$ se e só se $6x_0 + 2x_1 - 5x_2 = 0$.
Para determinar a intersecção das duas rectas $\ell_4 \cap r$ temos

$$\begin{cases} 6x_0 + 2x_1 - 5x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3x_1 \\ 6x_0 = 13x_1, \end{cases}$$

e então $\ell_4 \cap r = \{[13 : 6 : 18]\}$.

(2 val.) b) Verifique se os pontos $P, Q, R$ e $S$ formam um referencial de $\mathbb{P}^2$.

**Solução:** Como

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} = 0,$$

conclui-se que os pontos $P$, $Q$ e $S$ não são independentes, pelo que $P$, $Q$, $R$ e $S$ não formam um referencial projectivo.

(1 val.) c) Qual o conjunto dos pontos de $\mathbb{P}^2$ equidistantes dos pontos $\ell_1 \cap \ell_2$ e $\ell_2 \cap \ell_3$ para a distância projectiva $d_{\mathbb{P}^2}$?

**Solução:**

Sejam $A$ e $B$ os pontos $A := \ell_1 \cap \ell_2 = [0 : 1 : 0]$ e $B := \ell_2 \cap \ell_3 = [0 : 0 : 1]$. Então o conjunto $L \subset \mathbb{P}^2$ de pontos equidistantes de $A$ e $B$ é a união das duas rectas projectivas de equação $x_1 - x_2 = 0$ e $x_1 + x_2 = 0$.

Com efeito, escrevendo $X := [x_0 : x_1 : x_2]$ onde $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$ e $\|(x_0, x_1, x_2)\| = 1$, temos

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{P}^2}(X, A) = d_{\mathbb{P}^2}(X, B) &\Leftrightarrow \text{arcos } |\langle (x_0, x_1, x_2), (0, 1, 0)\rangle| = \text{arcos } |\langle (x_0, x_1, x_2), (0, 0, 1)\rangle| \\ &\Leftrightarrow |x_1| = |x_2|. \end{aligned}$$

(2 val.) d) Determine a transformação projectiva $\tau : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ que verifica

$$\tau(\ell_1) = \ell_2, \quad \tau(\ell_2) = \ell_3, \quad \tau(\ell_3) = \ell_4 \quad \text{e} \quad \tau(\ell_4) = \ell_1.$$

**Solução:** Como

$$\ell_1 \cap \ell_4 = [1 : 0 : 0], \quad \ell_1 \cap \ell_2 = [0 : 1 : 0], \quad \ell_2 \cap \ell_3 = [0 : 0 : 1] \quad \text{e} \quad \ell_3 \cap \ell_4 = [2 : 1 : 3],$$

temos que

$$\begin{aligned} \tau([1 : 0 : 0]) &= \tau(\ell_1 \cap \ell_4) = \tau(\ell_1) \cap \tau(\ell_4) = \ell_2 \cap \ell_1 = [0 : 1 : 0], \\ \tau([0 : 1 : 0]) &= \tau(\ell_1 \cap \ell_2) = \tau(\ell_1) \cap \tau(\ell_2) = \ell_2 \cap \ell_3 = [0 : 0 : 1], \\ \tau([0 : 0 : 1]) &= \tau(\ell_2 \cap \ell_3) = \tau(\ell_2) \cap \tau(\ell_3) = \ell_3 \cap \ell_4 = [2 : 1 : 3]. \end{aligned}$$

Então, $\tau([x_0 : x_1 : x_2]) = [T(x_0, x_1, x_2)]$ onde

$$T(x_0, x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2c \\ a & 0 & c \\ 0 & b & 3c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

com $a, b, c \neq 0$. Como $\ell_3 \cap \ell_4 = [2 : 1 : 3]$, temos que

$$\tau([2 : 1 : 3]) = \tau(\ell_3 \cap \ell_4) = \tau(\ell_3) \cap \tau(\ell_4) = \ell_4 \cap \ell_1 = [1 : 0 : 0]$$

e então temos, por exemplo, $a = -1/4$, $b = -3/2$ e $c = 1/6$, pelo que

$$T(x_0, x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ -1/4 & 0 & 1/6 \\ 0 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

ou seja $\tau([x_0 : x_1 : x_2]) = [4x_2 : -3x_0 + 2x_2 : -18x_1 + 6x_2]$.

2. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ considere a aplicação $f_\alpha : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ definida por

$$f_\alpha(z) = \frac{2z + \alpha}{-3z + 1}.$$

(2 val.) a) Determine os valores de $\alpha$ para os quais a restrição de $f_\alpha$ a $\mathbb{H}$ é uma translação hiperbólica.

**Solução:** Como $f_\alpha$ é uma transformação de Möbius com coeficientes reais, a sua restrição a $\mathbb{H}$ é uma isometria (directa) se e só se $2 + 3\alpha > 0$, ou seja se e só se $\alpha > -2/3$.

Além disso, como $\infty$ nunca é um ponto fixo de $f_\alpha$ (pois $f_\alpha(\infty) = -2/3$), para que a sua restrição a $\mathbb{H}$ seja uma translação hiperbólica, é necessário que tenha dois pontos fixos reais. Vejamos então quais os possíveis pontos fixos de $f_\alpha$ em $\mathbb{C}$. Como

$$f_\alpha(z) = z \Leftrightarrow \frac{2z+\alpha}{-3z+1} = z \Leftrightarrow 3z^2 + z + \alpha = 0,$$

conclui-se que $f_\alpha$ tem dois pontos fixos reais se e só se $1-12\alpha > 0$, ou seja se $\alpha < 1/12$. Assim, a restrição de $f_\alpha$ a $\mathbb{H}$ é uma translação hiperbólica se e só se $\alpha \in ]-2/3, 1/12[$.

(2 val.) b) Indique, justificando, uma isometria $h : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ tal que $g := h \circ f_0 \circ h^{-1}$ seja uma translação hiperbólica ao longo da recta de equação $\operatorname{Re} z = 0$.

**Solução:** Como $g$ é uma isometria directa de $\mathbb{H}$, será uma translação hiperbólica ao longo da recta de equação $\operatorname{Re} z = 0$ se e só se o seu conjunto de pontos fixos em $\mathbb{H} \cup \overline{\mathbb{R}}$ for $\{0, \infty\}$. Como

$$g(0) = 0 \Leftrightarrow f_0(h^{-1}(0)) = h^{-1}(0) \quad \text{e} \quad g(\infty) = \infty \Leftrightarrow f_0(h^{-1}(\infty)) = h^{-1}(\infty),$$

temos que $h^{-1}(0)$ e $h^{-1}(\infty)$ são pontos fixos de $f_0$. Assim,

$$\begin{cases} h^{-1}(0) = 0 \\ h^{-1}(\infty) = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} h^{-1}(0) = -\frac{1}{3} \\ h^{-1}(\infty) = 0 \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h(-\frac{1}{3}) = \infty \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} h(0) = \infty \\ h(-\frac{1}{3}) = 0. \end{cases}$$

Se $h(0) = 0$ e $h(\infty) = -\frac{1}{3}$ temos, por exemplo, a isometria $h : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ definida por

$$h(z) = \frac{z}{z+1/3} = \frac{3z}{3z+1}.$$

(1 val.) c) Indique, justificando, quais as circunferências de $\overline{\mathbb{C}}$ que são invariantes por $f_0$.

**Solução:**
Se $C$ é uma circunferência de $\overline{\mathbb{C}}$ tal que $f_0(C) = C$, então (considerando as extensões naturais de $g$ e $h$ a $\overline{\mathbb{C}}$) temos que $h(C)$ é uma circunferência de $\overline{\mathbb{C}}$ invariante por $g$, isto é $g(h(C)) = h(C)$.
Inversamente, se $C$ é uma circunferência de $\overline{\mathbb{C}}$ invariante por $g$, então $h^{-1}(C)$ é uma circunferência invariante por $f_0$.
Assim, **as circunferências de $\overline{\mathbb{C}}$ invariantes por $f_0$ são exactamente as imagens por $h^{-1}$ das circunferências de $\overline{\mathbb{C}}$ invariantes por** $g$.
Como $g$ é uma translação hiperbólica ao longo da recta de equação $\operatorname{Re} z = 0$, temos que

$$g(z) = \lambda z, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

Se $C$ é uma circunferência de $\overline{\mathbb{C}}$ que não passa em $\infty$, é definida por uma equação da forma

$$|z - z_0| = r,$$

com $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r \in \mathbb{R}^+$, pelo que

$$|\lambda z - \lambda z_0| = \lambda r,$$

e então $|g(z) - \lambda z_0| = \lambda r$. Conclui-se assim que $g(C)$ é a circunferência de centro $\lambda z_0$ e raio $\lambda r$. Se $g(C) = C$, então $\lambda = 1$, o que é impossível pois $g$ não é a identidade. Assim, $g$ não deixa invriante nehuma circunferência de $\mathbb{C}$.

Se $C$ passa em $\infty$ então $C = \ell \cup \{\infty\}$ (com $\ell$ uma recta de $\mathbb{C}$) e $\ell$ intersecta o eixo real num único ponto $z_0 \in \mathbb{R}$. Se $C$ é invariante por $g$, então, como $g(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$, temos

$$g(\{z_0, \infty\}) = \{z_0, \infty\}.$$

Como $g(\infty) = \infty$, temos que $g(z_0) = z_0$ e então $z_0 = 0$ (ou seja $C$ passa na origem). Conclui-se assim que **as circunferências de $\overline{\mathbb{C}}$ invariantes por $g$ são as circunferências da forma $C = \ell \cup \{\infty\}$ onde $\ell$ é uma recta em $\mathbb{C}$ que passa na origem**.

Consequentemente, **as circunferências de $\overline{\mathbb{C}}$ invariantes por $f_0$ são todas as circunferências de $\overline{\mathbb{C}}$ que passam em $-1/3$ e em** $0$ (pois $h^{-1}$ leva circunferências em circunferências e $h^{-1}(\infty) = -1/3$ e $h^{-1}(0) = 0$).

(2 val.) d) Mostre que $d_{\mathbb{H}}(z, f_0(z))$ é constante ao longo da recta hiperbólica de equação $|z+\frac{1}{6}| = \frac{1}{6}$.

**Solução:** Se $d_{\mathbb{H}}(z, f_0(z)) = k$ para todo o $z$ na recta hiperbólica de equação $|z + \frac{1}{6}| = \frac{1}{6}$, então, escrevendo $z = h^{-1}(w)$ com $w$ pertencente à recta hiperbólica de equação $\operatorname{Re} w = 0$, temos

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}\left(z, f_0(z)\right) = k &\Leftrightarrow d_{\mathbb{H}}\left(h^{-1}(w), f_0(h^{-1}(w))\right) = k \Leftrightarrow d_{\mathbb{H}}\left(w, h(f_0(h^{-1}(w)))\right) = k \\ &\Leftrightarrow d_{\mathbb{H}}(w, g(w))) = k. \end{aligned}$$

Basta então provar que $d_{\mathbb{H}}(w, g(w))$ é constante ao longo da recta hiperbólica de equação $\operatorname{Re} w = 0$. Assim, escrevendo $w = mi$ com $m \in \mathbb{R}^+$ e

$$g(z) = \lambda z, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+,$$

temos que

$$\delta_{\mathbb{H}}(w, g(w)) = \frac{|\lambda w - w|}{|\lambda w - \overline{w}|} = \frac{|\lambda mi - mi|}{|\lambda mi + mi|} = \frac{|mi(\lambda - 1)|}{|mi(\lambda + 1)|} = \frac{|\lambda - 1|}{|\lambda + 1|} = \frac{|\lambda - 1|}{\lambda + 1}$$

é constante ao longo da recta hiperbólica $\operatorname{Re} w = 0$ e, consequentemente, $d_{\mathbb{H}}(z, f_0(z))$ é constante ao longo da recta hiperbólica de equação $|z + \frac{1}{6}| = \frac{1}{6}$.

**Alternativamente** podemos mostrar directamente que $d_{\mathbb{H}}(z, f_0(z))$ é constante ao longo da recta hiperbólica de equação $|z + \frac{1}{6}| = \frac{1}{6}$. Com efeito, se $z = x + iy$ pertence a esta recta então

$$\left(z + \frac{1}{6}\right)\left(\overline{z} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{36} \Leftrightarrow |z|^2 + \frac{x}{3} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + x = -3y^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \delta^2_{\mathbb{H}}(z, f_0(z)) &= \left|\frac{2z + 3z^2 - z}{2z + 3|z|^2 - \overline{z}}\right|^2 = \frac{|z|^2(3z+1)(3\overline{z}+1)}{|3yi|^2} \\ &= \frac{|z|^2(9|z|^2 + 6x + 1)}{9y^2} = \frac{-x(3x+1)}{27y^2} = \frac{3y^2}{27y^2} = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

3. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

(1.5 val.) a) Dada uma recta hiperbólica $\ell \subset \mathbb{H}$, se $f, g : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ são duas isometrias tais que $f(\ell) = g(\ell) = \ell$, então $f$ e $g$ comutam i.e. $f \circ g = g \circ f$.

**Solução: (F)**

Seja $\ell$ a recta de equação Re $z = 0$. Então, por exemplo, as isometrias

$$f(z) = \lambda z, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \quad \text{(uma translação hiperbólica não trivial ao lonfgo de } \ell\text{)}$$

e

$$g(z) = \frac{1}{\bar{z}} \quad \text{(a reflexão na recta hiperbólica de equação } |z| = 1\text{, perpendicular a } \ell\text{)}$$

deixam $\ell$ invariante e não comutam pois

$$(f \circ g)(z) = \frac{\lambda}{\bar{z}} \quad \text{e} \quad (g \circ f)(z) = \frac{1}{\lambda \bar{z}}.$$

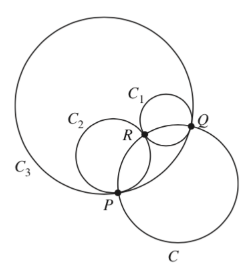
(1.5 val.) b) Quatro pontos distintos $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ pertencem a uma mesma circunferência de $\overline{\mathbb{C}}$ se e só se a sua razão cruzada é um número real.

**Solução: (V)**

Se $z_1, z_2, z_3, z_4$ pertencem a uma circunferência $\mathcal{C}$ de $\overline{\mathbb{C}}$, então $f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)$ pertencem a uma circunferência $\mathcal{C}'$ de $\overline{\mathbb{C}}$ (pois as transformações de Möbius levam circunferências de $\overline{\mathbb{C}}$ em circunferências de $\overline{\mathbb{C}}$). Como $f(z_1) = \infty$, $f(z_2) = 0$ e $f(z_3) = 1$, temos que $\mathcal{C}' = \overline{\mathbb{R}}$, e então $f(z_4) \in \mathbb{R}$.

Inversamente, se $w_i = f(z_i) \in \overline{\mathbb{R}}$ para $i = 1, \ldots, 4$, então, como $\overline{\mathbb{R}}$ é uma circunferência de $\overline{\mathbb{C}}$, conclui-se que os pontos $f^{-1}(w_i) = z_i$ pertencem a uma circunferência de $\overline{\mathbb{C}}$.

(3 val.) 4. Sejam $C_1$, $C_2$ e $C_3$ circunferências de $\mathbb{C}$ tais que $C_2$ intersecta $C_3$ num único ponto $P$, $C_1$ intersecta $C_3$ num único ponto $Q$ e $C_1$ intersecta $C_2$ num único ponto $R$. Seja $C$ a circunferência que passa nos pontos $P$, $Q$ e $R$. Mostre que $C$ é perpendicular a $C_1$, $C_2$ e $C_3$. **Sugestão:** Comece por considerar uma inversão numa circunferência de centro $R$.




**Solução:**

Seja $f$ uma inversão numa circunferência de centro $R$. Como $C_1$ e $C_2$ passam em $R$, as suas imagens por $f$ são duas circunferências de $\overline{\mathbb{C}}$ que passam em $\infty$, pelo que

$$f(C_1) = \ell \cup \{\infty\} \quad \text{e} \quad f(C_2) = m \cup \{\infty\},$$

onde $\ell$ e $m$ são duas rectas de $\mathbb{C}$. Além disso, como $C_1 \cap C_2 = R$, temos que

$$f(C_1) \cap f(C_2) = \{\infty\},$$

pelo que $\ell \cap m = \varnothing$ (ou seja, $\ell$ e $m$ são duas rectas paralelas de $\mathbb{C}$).

Como $C_3$ não passa em $R$, temos que $f(C_3)$ é uma circunferência de $\mathbb{C}$. Além disso,

$$f(C_3) \cap \ell = f(Q) \quad \text{e} \quad f(C_3) \cap m = f(P).$$

Assim, a circunferência $f(C_3)$ é tangente a $\ell$ e a $m$ e $f(P)f(Q)$ é um diâmetro de $f(C_3)$.

Como a circunferência $C$ passa em $R$, temos que $f(C)$ é uma circunferência de $\overline{\mathbb{C}}$ que passa em $\infty$, pelo que $f(C) = r \cup \{\infty\}$, onde $r$ é uma recta de $\mathbb{C}$. Além disso,

$$f(C) \cap \ell = r \cap \ell = f(Q) \quad \text{e} \quad f(C) \cap m = r \cap m = f(P).$$

Conclui-se assim que $r$ é perpendicular a $f(C_3)$, em $f(P)$ e $f(Q)$, e perpendicular a $f(C_1)$ e $f(C_2)$ em $f(Q)$ e $f(P)$ respectivamente.

Como $f$ preserva ângulos conclui-se que $C$ é perpendicular a $C_1$, $C_2$ e $C_3$ em $P$ e $Q$.

Para mostrar que $C$ é perpendicular a $C_1$ e $C_2$ em $R$ podemos considerar por exemplo uma inversão numa circunferência centrada em $P$ e repetir o argumento anterior.