Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
LMAC

Introdução à Geometria

Teste 1
9 de Novembro de 2017 - 14h
Duração: 1h30

1. Para cada $t \in \mathbb{R}$ considere o subespaço afim $\mathcal{F}_t$ de $\mathbb{R}^4$ gerado pelo ponto $P_t = (0,0,t,0)$ e pelo subespaço afim

$$\mathcal{G}_t = (1,0,1,0) + \mathcal{L}\{(1,0,0,0),(0,t,1-t,0)\}.$$

(1 val.) a) Para cada $t \in \mathbb{R}$ indique o espaço das direcções de $\mathcal{F}_t$ e a sua dimensão.

(1 val.) b) Determine, para cada valor de $t \in \mathbb{R}$, um sistema de equações cartesianas que defina $\mathcal{F}_t$.

(1 val.) c) Indique, se existir, um hiperplano que contenha todos os subespaços $\mathcal{F}_t$.

(1 val.) d) Calcule a distância do ponto P_2 ao subespaço afim $\mathcal{G}_2$.

(1 val.) e) Indique uma recta ℓ tal que $d(\ell, \mathcal{G}_2) = d(P_2, \mathcal{G}_2)$.

(1 val.) f) Indique a expressão de uma isometria não trivial de $\mathbb{R}^4$ que fixe os pontos de todos os subespaços $\mathcal{F}_t$.

(4 val.) 2. Considere a isometria $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y) = (-x + 2\sqrt{7}, -y + 1)$$

e a recta $l \subset \mathbb{R}^2$ de equação $y = -x$. Classifique detalhadamente as isometrias

$$f, \quad R_l \circ f, \quad R_m \circ f \circ R_m \quad \text{e} \quad f \circ R_m \circ f$$

onde m é uma recta qualquer de $\mathbb{R}^2$.

3. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

(1 val.) a) Se R_m e R_l são reflexões em duas rectas distintas paralelas l e m de $\mathbb{R}^2$ então $R_m \circ R_l = R_l \circ R_m$.

(1 val.) b) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma isometria então $d(P, f(P)) = d(Q, f(Q))$ para todos os pontos $P, Q \in \mathbb{R}^2$.

(1 val.) c) Em $\mathbb{R}^3$, se $\mathcal{H}$ é um plano e f é uma isometria inversa, então existe uma isometria directa h tal que $f = h \circ R_{\mathcal{H}}$.

(1 val.) d) Se $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ é uma isometria e $P \in \mathcal{E}$ é tal que $f^2(P) = P$ e $f(P) \neq P$, então existe um único ponto X colinear com P e $f(P)$ tal que $f(X) = X$.

(3 val.) 4. Mostre que qualquer transformação helicoidal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é a composta $f = g \circ h$ de duas isometrias directas g e h tais que $g^2 = h^2 = id_{\mathbb{R}^3}$.

(3 val.) 5. Seja $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ uma isometria num espaço afim euclidiano $\mathcal{E}$ que deixa uma recta ℓ invariante. Mostre que se f tem um ponto fixo $P \notin \ell$ então f tem infinitos pontos fixos.