Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
LMAC

Introdução à Geometria

Teste de Recuperação / Exame - 04 de Fevereiro de 2019 - 11h30
Duração: 1h30 (Teste) / 3h (Exame)

Teste 1

1. Para cada $t \in \mathbb{R}$ considere o subespaço afim $\mathcal{F}_t$ de $\mathbb{R}^4$ gerado pela recta

$$r_t = (1, 0, 1, 1) + \mathcal{L}\{(1, -t, t^2 + 1, t^2 - 1)\}$$

e pelos pontos $P = (1, 0, 1, 3)$ e $Q_t = (0, t, 0, 0)$.

(1 val.) a) Para cada $t \in \mathbb{R}$ indique o espaço das direcções de $\mathcal{F}_t$ e a sua dimensão.

(0,5 val.) b) Determine uma equação cartesiana que defina $\mathcal{F}_1$.

(0,5 val.) c) Indique uma recta $\ell \subset \mathbb{R}^4$ tal que $R_{\mathcal{F}_1}(\ell) = \ell$ e $\ell \not\subset \mathcal{F}_1$, onde $R_{\mathcal{F}_1}$ é a reflexão em $\mathcal{F}_1$.

(0.5 val.) d) Para cada $t \in \mathbb{R}$ determine um sistema de equações cartesianas que defina r_t.

(0,5 val.) e) Calcule a distância $d(P, r_1)$.

(0,5 val.) f) Determine a imagem $\rho_P(r_1)$ onde $\rho_P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ é a inversão em P.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a isometria definida por

$$f(x, y) = (3 + y, x - 3)$$

e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma isometria directa tal que $g(1, 0) = (5, 4)$ e $g(5, 4) = (1, 0)$.

(1 val.) a) Classifique detalhadamente as isometrias f, g, $g \circ f \circ g$ e $f \circ g \circ f$.

(0.5 val.) b) Quais os pontos fixos da isometria $g \circ R_\ell$ onde $\ell \subset \mathbb{R}^2$ é a recta de equação $x - y = 1$?

(0.5 val.) c) Quais as circunferências $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ tais que $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$?

3. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

(1 val.) a) Se $f \neq id$ é uma isometria de $\mathbb{R}^2$ e $f^n = id$ para algum $n \in \mathbb{N}$ então f é uma rotação ou uma reflexão.

(1 val.) b) Se um ponto M pertence ao eixo de uma reflexão com deslize $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ então existe um ponto $P \in \mathbb{R}^2$ tal que M é o ponto médio de P e $f(P)$.

(1 val.) c) Em $\mathbb{R}^3$, se $\rho_{\ell,\pi}$ é uma rotação de ângulo π em torno de uma recta ℓ e ρ_P é a inversão em P, então $\rho_{\ell,\pi} \circ \rho_P$ é uma reflexão com deslize se e só se $P \notin \ell$.

(1,5 val.) 4. Se ℓ e m são duas rectas concorrentes de $\mathbb{R}^2$ indique, justificando, o conjunto de pontos $P \in \mathbb{R}^2$ para os quais $\rho_{P,\alpha}(\ell) = m$ para algum $\alpha \in [0, 2\pi[$, onde $\rho_{P,\alpha}$ é a rotação de centro P e ângulo α.

Teste 2

5. Em $\mathbb{P}^3$ considere os pontos

$$P_1 := [1:0:1:2], \;\; P_2 := [0:1:1:1], \;\; P_3 = [2:1:2:2] \quad \text{e} \quad P_4 = [1:1:2:3]$$

e as aplicações projectivas

$$\tau_t\left([x_0 : x_1 : x_2 : x_3]\right) = [x_0 + x_1 : 2x_1 + x_2 : 2x_1 + (t^2+1)x_2 : -x_0 + 3x_1 + 2x_3],$$

com $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(1 val.) a) Determine equações que definam o subespaço projectivo gerado pelos quatro pontos e indique a sua dimensão.

(0,5 val.) b) Indique, se existir, um referencial projectivo que contenha os pontos P_1, P_2 e P_3.

(0,5 val.) c) Determine as equações da recta ℓ que passa em P_1 e P_2.

(0,5 val.) d) Indique uma recta projectiva $m \subset \mathbb{P}^3$ tal que ℓ e m sejam enviesadas.

(0,5 val.) e) Quais os valores de t para os quais $\tau_t(\ell) = \ell$?

(0.5 val.) f) Indique um ponto $Q \in \mathbb{P}^3$ tal que $\tau_t(Q) = Q$ para todo o $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

6. Seja $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ a isometria definida por

$$f(z) = \frac{(1+i)z + 1}{z + 1 - i}$$

e $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ a reflexão hiperbólica tal que $g(1/2) = 0$.

(1 val.) a) Classifique as isometrias f e $h \circ f \circ h$ onde h é a reflexão na recta de equação $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z$.

(1 val.) b) Indique a expressão de g.

(0.5 val.) c) Determine a equação da recta hiperbólica m que passa em $z_0 = \frac{1}{2}$ e é perpendicular ao eixo real.

(0.5 val.) d) Qual o conjunto de pontos fixos em $\overline{\mathbb{D}}$ de $g \circ R_m$, onde R_m é a reflexão na recta m?

7. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

(1 val.) a) Se $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ é uma isometria directa tal que $d_{\mathbb{H}}(z, f(z))$ é constante para todo o $z \in \mathbb{H}$ então f é a identidade.

(1 val.) b) Se ℓ e m são duas rectas enviesadas de $\mathbb{P}^3$ e $P \in \mathbb{P}^3 \setminus (\ell \cup m)$, então existe uma recta de $\mathbb{P}^3$ que passa em P e intersecta ℓ e m.

(1.5 val.) 8. Considere o subgrupo de isometrias hiperbólicas

$$\Gamma := \left\{ g : \mathbb{H} \to \mathbb{H} : \; g(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{com} \quad a,b,c,d \in \mathbb{Z}, \;\; ad - bc = 1 \right\}$$

e o conjunto $R := \{z \in \mathbb{H} : \; -\frac{1}{2} \le \operatorname{Re}(z) \le \frac{1}{2}, \;\; |z| \ge 1\}$. Mostre que, para cada $z \in \mathbb{H}$, existe um $g \in \Gamma$ tal que $g(z) \in R$.

Sugestão: Note que, dado um $z \in \mathbb{H}$, o número de pares $(c,d) \in \mathbb{Z}^2$ tais que $|cz + d| \le 1$ é finito, pelo que o conjunto $\{\operatorname{Im} g(z) : \; g \in \Gamma\}$ tem um máximo.