

Introdução à Geometria

Teste de Recuperação / Exame - 02 de Fevereiro de 2018 - 11h30

Duração: 1h30 (Teste) / 3h (Exame)

Teste 1

1. Em $\mathbb{R}^4$ considere a família de rectas

$$r_t = (1 - t, 2, t + 1, 0) + \mathcal{L}\{(t + 1, 0, 0, 1)\}, \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

- (0,5 val.) a) Para cada t determine as equações cartesianas de r_t .
- (0,5 val.) b) Determine o hiperplano de $\mathbb{R}^4$ que passa no ponto $(1, 2, 1, 1)$ e tal que r_1 seja um eixo de $\mathcal{H}$.
- (0,5 val.) c) Indique, se existirem, os valores de t para os quais $d(r_t, \mathcal{H}) > 0$.
- (0,5 val.) d) Quais os valores de t para os quais r_t é complanar com a recta de equações $x = 2$, $y - z = 0$ e $w = 1$?
- (0,5 val.) e) Diga, justificando, se existe algum hiperplano que seja paralelo a todas as rectas r_t .

2. Considere a isometria $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{\sqrt{5}}{3}y + 1, \frac{\sqrt{5}}{3}x - \frac{2}{3}y + \sqrt{5} \right),$$

- (1 val.) a) Classifique detalhadamente a isometria f .
- (1 val.) b) Indique a expressão de uma isometria $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $h \circ f$ seja uma rotação em torno do ponto $(-2, 0)$.
- (0,5 val.) c) Determine a imagem por f da circunferência de centro $(3, 3)$ e raio 1.

3. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

- (1 val.) a) Se $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ são duas isometria inversas então $f^2 \circ g^2 = g^2 \circ f^2$.
- (1 val.) b) Se a composta de duas rotações $\rho_{P,\alpha}$ e $\rho_{Q,\beta}$ de $\mathbb{R}^2$ é uma translação não trivial então $\alpha = \beta$.

(1,5 val.) 4. Considere uma reflexão $R_{\mathcal{H}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ num hiperplano $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^3$ e uma translação $T_u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Descreva a isometria $T_u \circ R_{\mathcal{H}}$ sabendo que T_u e $R_{\mathcal{H}}$ não comutam.

(1,5 val.) 5. Mostre que uma isometria directa $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma translação se e só se existem isometrias directas $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tais que $h = f \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1}$.

Teste 2

6. Em $\mathbb{P}^3$ considere os pontos $P := [-1 : 1 : 0 : 1]$, $Q := [0 : 0 : 1 : 1]$, $R_t = [1 : 0 : 1 : t^2 - 9]$ com $t \in \mathbb{R}$.

- (0,5 val.) a) Determine os valores de t para os quais existe um referencial que inclui os três pontos P, Q e R_t .
- (0,5 val.) b) Indique equações que definam o subespaço projectivo $\langle P, Q, R_0 \rangle$. Qual a sua dimensão?
- (0,5 val.) c) Diga se existe um plano projectivo que contenha todos os pontos P, Q, R_t .
- (0,5 val.) d) Seja $\mathcal{H}$ o plano projectivo de $\mathbb{P}^3$ de equação $x_0 = 0$. Dê um exemplo de uma transformação projectiva $\tau : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ diferente da identidade tal que $\tau(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ e $\tau(P) = P$.

7. Seja $C \subset \mathbb{R}^2$ a cónica $2x^2 + 2y + 4xy + y^2 = 26$ e considere a aplicação $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ definida por

$$\phi(x, y) = [x : y : 1].$$

- (0.5 val.) a) Escreva a equação da cónica $\tilde{C} \subset \mathbb{P}^2$ que verifica $\phi^{-1}(\tilde{C}) = C$.
- (0.5 val.) b) Quais os pontos de $\tilde{C} \subset \mathbb{P}^2$ no infinito?
- (0.5 val.) c) Classifique C .

8. Seja $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ uma reflexão com deslize hiperbólica que deixa invariante a recta hiperbólica de equação $|z| = 1$, e $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ a reflexão na recta m de equação $\operatorname{Re} z = 1$.

- (1 val.) a) Quais as possíveis expressões para f ?
- (0.5 val.) b) Sabendo que $f(0) = 2$ classifique a isometria $f \circ g$.
- (0,5 val.) c) Indique a expressão da reflexão na recta hiperbólica ℓ de equação $|z - 4| = 1$.
- (1 val.) d) Qual a equação da recta hiperbólica perpendicular a ℓ e a m ?

9. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

- (1 val.) a) Se $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ é uma isometria então a distância hiperbólica de z a $f(z)$ é constante para todo o $z \in \mathbb{H}$.
- (1 val.) b) A intersecção de dois planos de $\mathbb{P}^5$ é sempre não vazia.

(1.5 val.) 10. Seja $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ uma isometria directa com dois pontos fixos em $\overline{\mathbb{R}}$ e seja $x_0 \in \mathbb{R}$ um destes pontos. Mostre que se $\mathcal{A}$ é o interior da região limitada por um horociclo $\mathcal{C}$ que passa em x_0 e $z \in \mathcal{C} \cap \mathbb{H}$, então ou $f(z) \in \mathcal{A}$ ou $f^{-1}(z) \in \mathcal{A}$.