Introdução à Geometria

Leonor Godinho e Margarida Mendes Lopes

11/05/2023

Índice

Prefácio 3

Introdução 5

Capítulo 1. Geometria Afim 9
1.1. Espaço afim associado a um espaço vectorial 9
1.2. Espaços afins reais 25
1.3. Aplicações afins 32
1.4. Exercícios 39

Capítulo 2. Geometria Euclidiana 51
2.1. Espaços afins euclidianos 51
2.2. Distâncias e ângulos 53
2.3. Distâncias entre subespaços afins 55
2.4. Distâncias e reflexões 59
2.5. Isometrias 68
2.6. Isometrias de $\mathbb{R}^2$ 82
2.7. Simetrias e congruências 102
2.8. Descrição das isometrias de $\mathbb{R}^3$ 105
2.9. Exercícios 116

Capítulo 3. Geometria Projectiva 129
3.1. Espaço Projectivo 129
3.2. Subespaços projectivos 130
3.3. Decomposições do espaço projectivo 134
3.4. Mergulhos do espaço afim no espaço projectivo 137
3.5. Dualidade 138
3.6. Aplicações projectivas 140
3.7. A recta projectiva 147
3.8. Exercícios 149

Capítulo 4. Geometria Elíptica 159

4.1. A esfera S^2 159
4.2. O plano elíptico 169
4.3. A esfera de Riemann 177
4.4. Exercícios 185

Capítulo 5. Geometria Hiperbólica 191
5.1. O Plano Hiperbólico 191
5.2. O Disco de Poincaré 200
5.3. Exemplos de isometrias 204
5.4. Classificação de Isometrias 210
5.5. Triângulos hiperbólicos 221
5.6. Exercícios 222

Apêndice A. Álgebra 231
A.1. Grupos 231
A.2. Aneis e Corpos 233

Apêndice B. Noções associadas a um produto interno 235
B.1. Norma de um vector 235
B.2. Ângulo entre dois vectores 236
B.3. Ângulo orientado de dois vectores de $\mathbb{R}^2$ 236
B.4. Ângulo orientado entre duas rectas em $\mathbb{R}^2$ 237

Apêndice C. Aplicações ortogonais 239
C.1. Aplicações ortogonais 239
C.2. Propriedades das aplicações ortogonais de espaços de dimensão finita 240
C.3. Aplicações ortogonais de $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual 241
C.4. Forma normal de uma matriz ortogonal 243

Apêndice D. Espaço dual 245

Apêndice E. Grupo de Möbius generalizado 247

Prefácio

Este livro tem origem em notas de aula para uma disciplina introdutória de Geometria a nível de primeiro ou segundo ano de um curso universitário de Matemática. Não pretende ser exaustivo, mas sim familiarizar o leitor com os conceitos básicos de várias geometrias: afim, projectiva, elíptica e hiperbólica, preparando os alunos para um estudo mais aprofundado e investigação em geometria e topologia.

Há muitas formas possiveis de abordar uma disciplina introdutória de geometria. Aqui escolheu-se uma via analítica, usando coordenadas e recorrendo a técnicas básicas de Álgebra Linear. Seguiu-se o ponto de vista proposto por Felix Klein no Século XIX, dando enfâse ao estudo de isometrias nos diversos contextos. Os requisitos necessários, para além de conceitos básicos de Álgebra Linear, são revistos em diversos apêndices.

Gostaríamos de agradecer ao nosso colega Pedro Girão que leu cuidadosamente uma primeira versão deste texto e aos muitos alunos cujas sugestões e correcções ajudaram a construir este texto. Salientam-se os alunos Rodrigo Serrão e Duarte Maia.

Introdução

A Geometria aparece de uma forma empírica em todas as antigas civilizações (como a mesopotâmica ou a egípcia) no contexto de problemas de medição de comprimentos, áreas e volumes. Na verdade, a palavra *geometria* deriva do termo grego *geometria*, que significa medição da Terra (*geo* de Terra e *metria* de medição).

O desenvolvimento da geometria ao longo dos séculos teve vários aspectos por vezes interligados e por vezes não, por vezes relacionados com problemas práticos e por vezes com abordagens mais formais. Só no século XX se consegue que estes vários ramos apareçam como um todo.

É na geometria que surge a primeira abordagem formal de Matemática, com o tratado de Euclides "Elementos" para a geometria plana no século III A.C.. Aqui foram apresentados cinco postulados (que em termos modernos se diriam axiomas) dos quais se deduziam factos geométricos (em termos modernos teoremas). Durante muito tempo pensou-se que o quinto destes postulados, que é equivalente a dizer que "por um ponto exterior a uma recta passa uma única recta paralela a esta", era uma consequência dos restantes postulados. Ao longo dos séculos surgiram várias propostas de demonstração deste facto mas todas de uma forma ou doutra usavam afirmações equivalentes ao quinto postulado.

Foi só no século XIX que se provou que este postulado não é consequência dos restantes. Aparentemente foi Gauss (1777-1855) o primeiro matemático a encontrar uma demonstração deste facto. No entanto não a tornou pública por ser tão oposta às convicções vigentes. Bolyai (1802-1860) e Lobachevsky (1793-1856) independentemente encontraram exemplos consistentes de geometrias em que a negação do quinto postulado se verificava, demonstrando assim a indepêndencia deste postulado. Note-se que a negação de "por um ponto exterior a uma recta passa uma única recta paralela a esta" é "por um ponto exterior a uma recta não passa nenhuma recta paralela a esta ou passa mais do que uma rectas paralela a esta". Nas geometrias de Bolyai e Lobachevsky verifica-se que no plano por um ponto exterior a uma recta

passam infinitas rectas paralelas a esta. Este tipo de geometria é designado por geometria hiperbólica.

Aliás foi no século XIX que a geometria teve um enorme desenvolvimento, tendo surgido numerosos novos conceitos, que levaram por exemplo ao desenvolvimento da geometria projectiva. O estudo de projecções centrais preocupou muitos artistas desde o fim da Idade Média, devido a problemas de perspectiva e levou ao desenvolvimento no século XVII dos princípios da geometria projectiva por Kepler e principalmente por Desargues. Apesar de no século XVIII Monge ter desenvolvido vários aspectos desta geometria, foi somente no século XIX com a redescoberta por Chasles do trabalho de Desargues, e a publicação (independente) por Poncelet de um tratado de geometria projectiva, que houve um verdadeiro desenvolvimento. Este desenvolvimento foi também possibilitado pela introdução de coordenadas homogéneas para a geometria projectiva por Möbius em 1827. Anteriormente a criação da geometria analítica ou seja o uso de coordenadas e equações por Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665) tinha já simplificado a abordagem de vários problemas, possibilitando por exemplo uma classificação simples das cónicas e também a notável classificação das cúbicas planas por Newton (1642-1727).

O plano projectivo é um dos exemplos da chamada geometria elíptica onde não existem rectas paralelas. Outros exemplos de geometria elíptica são a esfera e a esfera de Riemann.

O aparecimento de diferentes geometrias levou à criação de novos enquadramentos teóricos como a formulação por Hilbert em 1894 de um conjunto rigoroso de axiomas para a geometria euclidiana ou o programa de Erlangen (1872) de Felix Klein generalizando geometrias euclidianas e não euclidianas e cujo ingrediente central é o conceito de simetria.

Foi também no século XIX que a noção do que é um espaço geométrico se tornou muito mais abrangente. Isto deveu-se a numerosos matemáticos mas sobretudo a Riemann (1826-1866). Foi o desenvolvimento destas novas ideias que levou também à criação de todo um novo corpo de estudo: a topologia que rapidamente se tornou uma área autónoma da geometria.

No entanto, apesar do enorme desenvolvimento ao longo do tempo, continuam a ser pedras basilares da geometria os conceitos de ponto, recta, plano e curvas. Para além das aplicações noutros ramos da matemática e à física, a geometria tem um papel importante em muitos outros domínios como por exemplo arte, arquitectura, robótica, computação gráfica. Note-se

que muitas vezes os conceitos geométricos foram desenvolvidos muito antes dos problemas de vida real que ajudaram a resolver.

CAPÍTULO 1

Geometria Afim

Um espaço afim é um conjunto de pontos no qual quaisquer dois pontos definem um elemento dum espaço vectorial (um vector). Tirando partido desse espaço vectorial a geometria afim é construída utilizando álgebra linear.

1.1. Espaço afim associado a um espaço vectorial

Seja V um espaço vectorial sobre um corpo K de característica zero[1] (por exemplo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

DEFINIÇÃO 1.1.1. *Um conjunto $\mathcal{A} \neq \emptyset$ diz-se um* **espaço afim** *associado a V se existir uma aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \to & V \\ (P, Q) & \mapsto & \overrightarrow{PQ} \ (:= \varphi(P, Q)) \end{array}$$

verificando as seguintes propriedades:

1. *Para todo o $P \in \mathcal{A}$ e para todo o vector $v \in V$, existe um e um só elemento Q em $\mathcal{A}$ tal que $\overrightarrow{PQ} = v$.*
2. *(**Relação de Chasles ou relação triangular**) Para todos os elementos $P, Q, R \in \mathcal{A}$,*

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}, \tag{1.1.1}$$

ou seja $\varphi(P, Q) + \varphi(Q, R) = \varphi(P, R)$.

[1] Diz-se que um corpo F tem característica 0 se a relação $m\,a = 0$ onde $a \in F \setminus \{0\}$ e $m \in \mathbb{Z}$ só se verifica se $m = 0$.

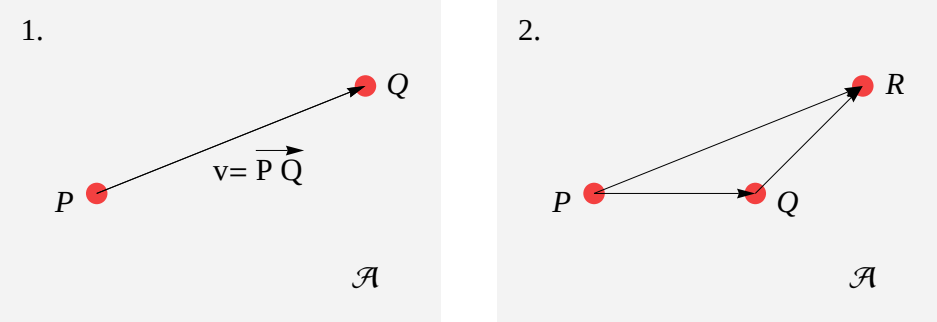

FIGURA 1.1. Espaço afim

Se $\mathcal{A}$ é um espaço afim dá-se o nome de **pontos** aos elementos de $\mathcal{A}$. Os pontos são usualmente indicados por letras maiúsculas. Dados dois pontos P, Q de $\mathcal{A}$, diz-se que o vector $\overrightarrow{PQ}$ é **o vector com origem em** P **e extremidade em** Q.

Dado um ponto P de um espaço afim $\mathcal{A}$ associado ao espaço vectorial V e um vector v de V, usa-se a **notação simbólica** $P + v$ para indicar o único ponto Q tal que $\overrightarrow{PQ} = v$ (note que, nesta notação, $P + \overrightarrow{PQ} = Q$). Dados dois pontos $P, Q \in \mathcal{A}$, o vector $\overrightarrow{PQ}$ designa-se também pela **notação simbólica** $Q - P$.

A relação triangular tem as seguintes consequências.

PROPOSIÇÃO 1.1.2. *Se $\mathcal{A}$ é um espaço afim (associado ao espaço vectorial V) e P e Q são pontos de $\mathcal{A}$, então:*

1) $\overrightarrow{PP} = 0_V$ *(um vector com origem e extremidade num mesmo ponto é o vector nulo);*
2) $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ *(o vector com origem em P e extremidade em Q é simétrico do vector com origem em Q e extremidade em P);*
3) *para qualquer ponto P de um espaço afim $\mathcal{A}$ e quaisquer dois vectores u, v de V tem-se*

$$P + (u + v) = (P + u) + v.$$

Demonstração:

1) Usando a relação triangular temos $\overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = 2\overrightarrow{PP}$, pelo que $\overrightarrow{PP} = 0_V$.
2) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = 0_V$, pelo que $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$.
3) Seja $Q \in \mathcal{A}$ tal que $u = \overrightarrow{PQ}$ (isto é $Q = P + u$) e $R \in \mathcal{A}$ tal que $v = \overrightarrow{QR}$, isto é $R = Q + v = (P + u) + v$. Então, pela relação

triangular, temos

$$u + v = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR},$$

pelo que $R = P + (u + v)$ e o resultado segue.

□

NOTA 1.1.3 (**Estrutura de espaço afim de um espaço vectorial**). Qualquer espaço vectorial V tem uma estrutura natural de espaço afim dada pela aplicação

$$\begin{array}{rcl} \varphi : V \times V & \to & V \\ (u, v) & \mapsto & v - u. \end{array}$$

Em particular, o espaço vectorial

$$K^n = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in K\}$$

tem uma estrutura natural de espaço afim a que se dá o nome de **estrutura canónica** (ou natural) de K^n como espaço afim. O espaço K^n com esta estrutura denota-se por vezes por $\mathbb{A}^n_K$ ou simplesmente por $\mathbb{A}^n$.

PROPOSIÇÃO 1.1.4 (**Regra do Paralelogramo**). *Sejam $P, Q, P', Q' \in \mathcal{A}$. Então*

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'} \Leftrightarrow \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}.$$

Demonstração: Usando a relação triangular temos

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{P'Q} + \overrightarrow{QQ'},$$

pelo que

$$\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PP'} - \overrightarrow{QQ'}$$

e o resultado segue (ver Figura 1.2). □

1.1.1. Subespaços afins. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim associado ao espaço vectorial V. Um subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$ diz-se um **um subespaço afim** se

$$\mathcal{F} = P + W := \{P + w : w \in W\},$$

onde P é um ponto de $\mathcal{F}$ e $W \subseteq V$ é um subespaço vectorial.

O subespaço vectorial W chama-se o **subespaço** (ou espaço) **de direcções** (ou **direcção**) de $\mathcal{F}$. Se $\mathcal{F} = P + W$ diz-se que $\mathcal{F}$ é o **subespaço afim que passa por P com direcção W**.

NOTA 1.1.5. Por definição, $\mathcal{A}$ é um subespaço afim de $\mathcal{A}$. Também um ponto P é um subespaço afim de $\mathcal{A}$ com direcção o espaço vectorial nulo.

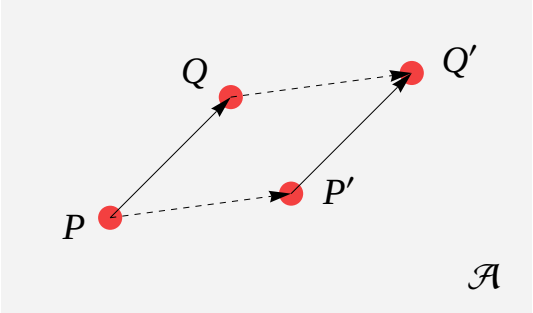

FIGURA 1.2. Regra do Paralelogramo

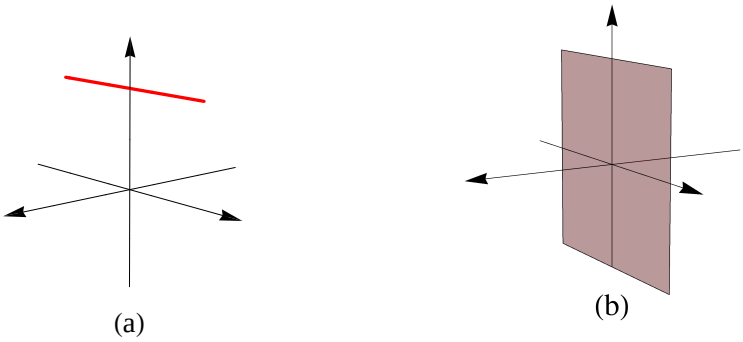

FIGURA 1.3. Exemplos de subspaços afins de $\mathbb{R}^3$: (a) $(0,0,1)+\mathcal{L}\{(0,1,0)\}$; (b) $(0,0,1)+\mathcal{L}\{(0,0,1),(0,1,0)\}$.

PROPOSIÇÃO 1.1.6. *Seja $\mathcal{F} = P_0 + W$ um subespaço afim de $\mathcal{A}$. Então,*

1) *$\mathcal{F}$ é ele próprio um espaço afim associado ao espaço vectorial W;*
2) *qualquer que seja o ponto $Q \in \mathcal{F}$, temos $\mathcal{F} = Q + W$;*
3) *$W = \{\overrightarrow{PQ} : P, Q \in \mathcal{F}\}$ (ou seja, W fica univocamente determinado por $\mathcal{F}$).*

Demonstração:

1) Como $\mathcal{A}$ é um espaço afim existe um aplicação $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$ que satisfaz as condições 1. e 2. da Definição 1.1.1. Restringindo

a aplicação φ a $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ obtemos uma aplicação

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{F} \times \mathcal{F} & \to & W \\ (P, Q) & \mapsto & \overrightarrow{PQ}. \end{array} \tag{1.1.2}$$

De facto, se $P, Q \in \mathcal{F}$ então existem vectores $u, v \in W$ tais que $P = P_0 + u$ e $Q = P_0 + v$ (isto é $u = \overrightarrow{P_0P}$ e $v = \overrightarrow{P_0Q}$), pelo que

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PP_0} + \overrightarrow{P_0Q} = -\overrightarrow{P_0P} + \overrightarrow{P_0Q} = v - u \in W.$$

Vejamos agora que esta aplicação definida em $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ satisfaz as duas condições da Definição 1.1.1.

Como $\mathcal{A}$ é um espaço afim, sabemos, pela condição 1. da Definição 1.1.1 que, para todo o $P \in \mathcal{F}$ e $w \in W$, existe um único ponto $Q \in \mathcal{A}$ tal que $\overrightarrow{PQ} = w$. Resta-nos ver que $Q \in \mathcal{F}$. Como $P \in \mathcal{F}$, temos que existe um vector $v \in W$ tal que $P = P_0 + v$ e então

$$Q = P + w = (P_0 + v) + w = P_0 + (v + w) \in \mathcal{F}.$$

Finalmente, como a relação triangular em $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ é herdada da mesma relação em $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, conclui-se que $\mathcal{F}$ é um espaço afim.

2) Seja $Q = P_0 + w$ (com $w \in W$) um ponto de $\mathcal{F}$.

Vejamos primeiro que $Q + W \subseteq P_0 + W$. Se $P \in Q + W$, então existe $u \in W$ tal que $P = Q + u$. Assim,

$$P = Q + u = (P_0 + w) + u = P_0 + (u + w) \in P_0 + W.$$

Por outro lado, se $P \in P_0 + W$ então existe $v \in W$ tal que $P = P_0 + v$, pelo que

$$\begin{aligned} P = P_0 + v = P_0 + \overrightarrow{P_0P} &= P_0 + (\overrightarrow{P_0Q} + \overrightarrow{QP}) \\ &= (P_0 + \overrightarrow{P_0Q}) + \overrightarrow{QP} = Q + \overrightarrow{QP} \in Q + W \end{aligned}$$

pois, como vimos em 1), se $P, Q \in \mathcal{F}$, o vector $\overrightarrow{QP}$ pertence a W. Conclui-se assim que $P_0 + W \subseteq Q + W$ e então

$$\mathcal{F} = P_0 + W = Q + W.$$

3) Como vimos em 1), se P e Q são dois pontos de $\mathcal{F}$, o vector $\overrightarrow{PQ}$ pertence a W e a aplicação φ em (1.1.2) é sobrejectiva. Conclui-se assim que

$$W = \{\overrightarrow{PQ} : P, Q \in \mathcal{F}\}.$$

□

1.1.2. Dimensão e codimensão. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim associado ao espaço vectorial V. A **dimensão** de $\mathcal{A}$ é a dimensão de V como espaço vectorial. Em particular, se $\mathcal{F} = P + W$ é um subespaço afim de $\mathcal{A}$, a dimensão de $\mathcal{F}$ é a dimensão de W.

Um espaço (ou subespaço) afim de dimensão 0 diz-se um **ponto**, de dimensão 1 uma **recta**, de dimensão 2 um **plano** e, de dimensão m um m**-plano**.

Se $\mathcal{A}$ é um espaço afim de dimensão finita n e $\mathcal{F}$ é um subespaço afim de $\mathcal{A}$ de dimensão k, a **codimensão** de $\mathcal{F}$ é o número $n-k$. Um subespaço afim $\mathcal{H}$ de codimensão 1 diz-se um **hiperplano**.

NOTA 1.1.7. A noção de codimensão é relativa. A dimensão de um hiperplano de $\mathcal{A}$ e a codimensão de um m-plano de $\mathcal{A}$ dependem da dimensão de $\mathcal{A}$. Por exemplo,

- se $\mathcal{A}$ tem dimensão 2 (e.g. $\mathcal{A}$ é o espaço afim real $\mathbb{R}^2$), os hiperplanos de $\mathcal{A}$ são as rectas;
- se $\mathcal{A}$ tem dimensão 3 (e.g. $\mathcal{A}$ é o espaço afim real $\mathbb{R}^3$), um hiperplano de $\mathcal{A}$ tem dimensão 2 (ou seja é um plano);
- uma recta em $\mathbb{R}^8$ tem codimensão 7 enquanto que uma recta em $\mathbb{R}^2$ tem codimensão 1;
- um 3-plano do espaço afim complexo $\mathbb{C}^5$ tem codimensão (complexa) 2.

Verifica-se facilmente que, dados dois pontos distintos $P, Q \in \mathcal{A}$, existe uma única recta de $\mathcal{A}$ que os contém (a recta que passa por P com a direcção do vector $\overrightarrow{PQ}$). Esta recta pode indicar-se por

$$PQ := P + \{\lambda \overrightarrow{PQ} : \ \lambda \in K\} = P + \mathcal{L}\{\overrightarrow{PQ}\}.$$

NOTA 1.1.8. Dado um número finito de vectores $v_1, \ldots, v_k \in V$, usamos a notação $\mathcal{L}\{v_1, \ldots, v_k\}$ para indicar a expansão linear de $v_1, \ldots, v_k$ (ou seja o menor subespaço vectorial que contém $\{v_1, \ldots, v_k\}$).

Dicionário: Dado um ponto Q e uma recta r de $\mathcal{A}$ as seguintes expressões são equivalentes:

- $Q \in r$;
- r contém Q;
- Q e r são incidentes;
- r passa por Q;
- Q incide com r;
- r incide com Q.

1.1.3. Paralelismo.

DEFINIÇÃO 1.1.9. *Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim. Dois subespaços afins de $\mathcal{A}$*

$$\mathcal{F} = P + U \quad e \quad \mathcal{G} = Q + W$$

dizem-se **paralelos** *se $U \subseteq W$ ou $W \subseteq U$.*

Por outras palavras, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são paralelos se o subespaço (vectorial) de direcções de um dos subespaços afins estiver contido no subespaço de direcções do outro.

NOTA 1.1.10.

(i) Um subespaço afim é sempre paralelo a si próprio.
(ii) Se $\mathcal{F} = P + U$ e $\mathcal{G} = Q + W$ têm a mesma dimensão m, então $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são paralelos se e só se $U = W$.

TEOREMA 1.1.11. *Se dois subespaços afins de um mesmo espaço afim são paralelos, ou têm intersecção vazia ou um deles está contido no outro.*

Em particular, dois subespaços afins associados ao mesmo subespaço vectorial, ou são disjuntos ou são iguais.

Demonstração: Sejam $\mathcal{F} = P + U$ e $\mathcal{G} = Q + W$ dois subespaços afins paralelos do espaço afim $\mathcal{A}$. Por definição de paralelismo, $U \subseteq W$ ou $W \subseteq U$.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $U \subseteq W$. Se $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, existe um ponto $R \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, pelo que $\mathcal{F} = R + U$ e $\mathcal{G} = R + W$. Conclui-se que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, com igualdade se $U = W$. □

Este teorema tem como consequência que

- duas rectas distintas paralelas não se intersectam.
- uma recta paralela a um plano ou não intersecta o plano ou está contida no plano.
- dois hiperplanos diferentes e paralelos não se intersectam.
- se duas rectas paralelas se intersectam então são coincidentes.
- etc ...

1.1.4. Intersecção de subespaços afins.

TEOREMA 1.1.12. *Sejam $\mathcal{F} = P + U$ e $\mathcal{G} = Q + W$ dois subespaços afins de um espaço afim $\mathcal{A}$. Então, ou $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$, ou $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ é um subespaço afim.*

Mais precisamente, se $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ e R é um ponto de $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, então

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = R + (U \cap W).$$

Demonstração: Suponhamos que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ e consideremos um ponto $R \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Podemos escrever então $\mathcal{F} = R + U$ e $\mathcal{G} = R + W$.

Um ponto $P \in R + (U \cap W)$ pertence obviamente a $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, pelo que $R + (U \cap W) \subseteq \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

Por outro lado, se um ponto P está simultaneamente em $\mathcal{F}$ e em $\mathcal{G}$, temos que, necessariamente, o vector $\overrightarrow{RP}$ pertence a ambos os espaços vectoriais U e W, donde $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \subseteq R + (U \cap W)$.

Concluimos que se $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, então $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = R + (U \cap W)$. □

Este teorema generaliza-se facilmente.

TEOREMA 1.1.13. *A intersecção de subespaços afins ou é vazia ou é um subespaço afim. Mais precisamente, se $B_\alpha = P_\alpha + U_\alpha$, $\alpha \in I$ é uma família de subespaços afins associados a subespaços vectoriais U_α então*

- $\cap_{\alpha \in I} B_\alpha = \emptyset$ *ou*
- $\cap_{\alpha \in I} B_\alpha$ *é um subespaço afim associado ao subespaço vectorial* $\cap_{\alpha \in I} U_\alpha$.

NOTA 1.1.14. Se $\cap_{\alpha \in I} B_\alpha \neq \emptyset$, temos $\cap_{\alpha \in I} B_\alpha = R + \cap_{\alpha \in I} U_\alpha$, onde R é um ponto qualquer de $\cap_{\alpha \in I} B_\alpha$.

Vejamos agora um critério para determinar se a intersecção de dois subespaços afins é ou não vazia.

TEOREMA 1.1.15. *Sejam $\mathcal{F} = P + U$ e $\mathcal{G} = Q + W$ dois subespaços afins de um espaço afim $\mathcal{A}$. Então $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ se e só se o vector $\overrightarrow{PQ}$ pertence ao subespaço vectorial $U + W$.*

Demonstração: Suponhamos que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ e seja R um ponto de $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Então, como $R \in \mathcal{F}$, o vector $\overrightarrow{PR} \in U$. Analogamente o vector $\overrightarrow{RQ} \in W$. Como, pela Relação de Chasles (1.1.1), $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}$, conclui-se que $\overrightarrow{PQ} \in U + W$. Provámos assim que

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset \Longrightarrow \overrightarrow{PQ} \in U + W.$$

Por outro lado, se $\overrightarrow{PQ} \in U + W$, então existem vectores $u \in U$ e $w \in W$ tais que $\overrightarrow{PQ} = u + w$. Por definição de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, o ponto $P + u \in \mathcal{F}$ e o ponto $Q - w \in \mathcal{G}$. Assim, como

$$P + u = P + (\overrightarrow{PQ} - w) = (P + \overrightarrow{PQ}) - w = Q - w,$$

temos que $P + u = Q - w \in \mathcal{F} \cap G$, pelo que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$. □

1.1.5. Subespaço afim gerado por um subconjunto. Seja S um subconjunto não vazio de um espaço afim $\mathcal{A}$. O **subespaço afim gerado** por S, que se indica por $\langle S\rangle$ (ou por $\mathrm{Aff}(S)$), é o menor subespaço afim de $\mathcal{A}$ que contém S (ou, de forma equivalente, é a intersecção de todos os subespaços afins de $\mathcal{A}$ que contêm S).

TEOREMA 1.1.16. *Sejam $\mathcal{F} = P+U$ e $\mathcal{G} = Q+W$ dois subespaços afins de um espaço afim $\mathcal{A}$. O subespaço afim gerado por $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ é*

$$\langle \mathcal{F}, \mathcal{G}\rangle = P + \left(\mathcal{L}\{\overrightarrow{PQ}\} + U + W\right),$$

ou seja, é o subespaço afim que passa por P com direcção o subespaço vectorial $\mathcal{L}\{\overrightarrow{PQ}\} + U + W$.

Demonstração: Claramente, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são subconjuntos de

$$P + \left(\mathcal{L}\{\overrightarrow{PQ}\} + U + W\right).$$

Assim, por definição, $\langle \mathcal{F}, \mathcal{G}\rangle \subseteq P + \left(\mathcal{L}\{\overrightarrow{PQ}\} + U + W\right)$.

Para mostrar que a inclusão anterior é uma igualdade basta mostrar que qualquer subespaço afim $\mathcal{H}$ que contenha $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ contém necessariamente $P+\left(\mathcal{L}\{\overrightarrow{PQ}\} + U + W\right)$. Seja então $\mathcal{H}$ um subespaço afim que contém $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ e T o subespaço vectorial de direcções de $\mathcal{H}$. Como $\mathcal{H}$ contém $\mathcal{F}$ então $P \in \mathcal{H}$ e podemos escrever $\mathcal{H} = P + T$ onde $U \subseteq T$. Como $\mathcal{H}$ contém $\mathcal{G}$, também $Q \in \mathcal{H}$ e $W \subseteq T$. Dado que $P, Q \in \mathcal{H}$, necessariamente $\overrightarrow{PQ} \in T$. Concluimos então que $\mathcal{L}\{\overrightarrow{PQ}\} + U + W \subseteq T$ donde $P + \left(\mathcal{L}\{\overrightarrow{PQ}\} + U + W\right) \subseteq \mathcal{H}$. □

TEOREMA 1.1.17. *Sejam $\mathcal{F} = P+U$ e $\mathcal{G} = Q+W$ dois subespaços afins de dimensão finita de um espaço afim $\mathcal{A}$.*

1) Se $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ então

$$\dim\langle \mathcal{F}, \mathcal{G}\rangle = \dim \mathcal{F} + \dim \mathcal{G} - \dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}).$$

2) Se $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ então

$$\dim\langle \mathcal{F}, \mathcal{G}\rangle = 1 + \dim \mathcal{F} + \dim \mathcal{G} - \dim(U \cap W).$$

Demonstração: Pelo Teorema 1.1.16, a dimensão de $\langle \mathcal{F}, \mathcal{G}\rangle$ é a dimensão do subespaço vectorial $\mathcal{L}\{\overrightarrow{PQ}\} + U + W$.

1) Se $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, pelo Teorema 1.1.15 temos $\overrightarrow{PQ} \in U + W$ e então $\mathcal{L}\{\overrightarrow{PQ}\} + U + W = U + W$. Como, pelo Teorema das dimensões da álgebra linear temos

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W),$$

e, pelo Teorema 1.1.12, temos $\dim(U \cap W) = \dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})$, a afirmação segue.

2) Como $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ temos, pelo Teorema 1.1.15, que

$$\dim\left(\mathcal{L}\{\overrightarrow{PQ}\} + U + W\right) = 1 + \dim(U + W)$$

e o resultado segue pelo Teorema das dimensões da álgebra linear.

□

O teorema anterior tem várias consequências imediatas, tais como:

- Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são subespaços afins paralelos não contidos um no outro com dimensões m, k com $k \leq m$, então $\dim\langle \mathcal{F}, \mathcal{G}\rangle = m + 1$. Em particular, o subespaço afim gerado por duas rectas paralelas disjuntas tem dimensão 2.
- Uma recta e um hiperplano não paralelos intersectam-se num ponto.
- Dois hiperplanos diferentes ou são paralelos ou intersectam-se num subespaço afim de codimensão 2. Em particular, num espaço afim de dimensão 3 (e.g. $\mathbb{R}^3$) dois planos distintos ou são paralelos ou a sua intersecção é uma recta.
- Se $\mathcal{F}$ é um m-plano e $\mathcal{G}$ um k-plano, o subespaço afim gerado por $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ tem no máximo dimensão $m + k + 1$.

Definição 1.1.18. *Duas rectas dizem-se* **enviesadas** *se gerarem um subespaço afim de dimensão* 3 *(a maior dimensão possível).*

Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim associado a um espaço vectorial V e

$$S = \{P_0, \ldots, P_m\}$$

um conjunto finito de pontos de $\mathcal{A}$. Os pontos $P_0, ..., P_m$ dizem-se **independentes** (do ponto de vista afim) se, fixando um deles, os m vectores com origem nesse ponto e extremidade nos restantes forem linearmente independentes. Note que, pela relação triangular, esta definição é independente do ponto de S escolhido para origem dos vectores. Por exemplo, escolhendo P_0, os pontos $P_0, ..., P_m$ são independentes se os vectores $\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_m}$ forem linearmente independentes.

Alternativamente, como o subespaço afim $\langle S\rangle$ gerado por S é dado por

$$\langle S\rangle = \langle P_0, \ldots, P_m\rangle = P_0 + \mathcal{L}\{\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_m}\},$$

a sua dimensão é, no máximo, m e temos o seguinte resultado.

Teorema 1.1.19. *Num espaço afim, k pontos são independentes se e só se o subespaço afim gerado por eles tiver dimensão $k - 1$.*

NOTA 1.1.20. Dois ponto distintos de um espaço afim são sempre independentes.

1.1.6. Combinações afins de pontos. Dado um espaço afim $\mathcal{A}$, chama-se uma **combinação afim** dos pontos $P_0, ..., P_m$ de $\mathcal{A}$ a qualquer ponto P que se pode escrever na forma

$$P = P_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \overrightarrow{P_0P_i},$$

onde $a_i \in K$ para todo o $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Em analogia com o espaço afim $\mathbb{A}_K$, considerando um outro ponto $O \in \mathcal{A}$ qualquer (que assume o papel de "origem"), podemos escrever o ponto

$$P = P_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \overrightarrow{P_0P_i}$$

na forma

$$\begin{aligned} P = P_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \overrightarrow{P_0P_i} &= O + \overrightarrow{OP_0} + \sum_{i=1}^{m} a_i \left(\overrightarrow{P_0O} + \overrightarrow{OP_i}\right) \\ &= O + \left(1 - \sum_{i=1}^{m} a_i\right) \overrightarrow{OP_0} + \sum_{i=1}^{m} a_i \overrightarrow{OP_i} = O + \sum_{i=0}^{m} a_i \overrightarrow{OP_i}, \end{aligned}$$

onde $a_0 := 1 - \sum_{i=1}^{m} a_i$.

Esquecendo o ponto O, obtém-se uma notação homogénea para representar uma combinação afim de pontos:

$$\sum_{i=0}^{m} a_i P_i, \quad \text{com} \quad \sum_{i=0}^{m} a_i = 1, \tag{1.1.3}$$

com o significado

$$\sum_{i=0}^{m} a_i P_i := P_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \overrightarrow{P_0P_i},$$

ou, equivalentemente, escolhendo um ponto $X \in \mathcal{A}$ qualquer,

$$\sum_{i=0}^{m} a_i P_i := X + \sum_{i=0}^{m} a_i \overrightarrow{XP_i}.$$

Note que (1.1.3) é apenas uma notação para representar uma combinação afim de pontos pois não se podem somar pontos de um espaço afim.

NOTA 1.1.21. Se os pontos $P_0, \ldots, P_m$ forem independentes então qualquer elemento de $\langle P_0, \ldots, P_m \rangle$ pode ser escrito de forma única como

$$a_0 P_0 + \cdots + a_m P_m \quad \text{com} \quad \sum_{i=0}^{m} a_i = 1.$$

EXEMPLO 1.1.22. Sejam P, Q, R pontos de um espaço afim $\mathcal{A}$. A combinação afim

$$\frac{1}{2}P + \frac{5}{2}Q - 2R$$

representa o ponto

$$P + \frac{5}{2}\overrightarrow{PQ} - 2\overrightarrow{PR}$$

que pode escrever-se também como

$$Q + \frac{1}{2}\overrightarrow{QP} - 2\overrightarrow{QR} \quad \text{ou} \quad R + \frac{1}{2}\overrightarrow{RP} + \frac{5}{2}\overrightarrow{RQ},$$

ou, em geral, para um ponto $X \in \mathcal{A}$ qualquer,

$$X + \frac{1}{2}\overrightarrow{XP} + \frac{5}{2}\overrightarrow{XQ} - 2\overrightarrow{XR}.$$

EXEMPLO 1.1.23. A recta r definida por dois pontos distintos P e Q pode ser descrita como

$$\begin{aligned} r = P + \mathcal{L}\{\overrightarrow{PQ}\} &= \{P + \lambda\overrightarrow{PQ} : \lambda \in K\} \\ &= \{(1-\lambda)P + \lambda Q : \lambda \in K\} \\ &= \{aP + bQ : a, b \in K,\ a + b = 1\}, \end{aligned}$$

ou seja é o conjunto de todas as combinações afins de P e Q.

NOTA 1.1.24. Se $X = a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3$ é uma combinação afim de pontos de $\mathcal{A}$ com $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ e $a_1 + a_2 \neq 0$, então

$$X = (a_1 + a_2)\left(\frac{a_1}{a_1 + a_2}P_1 + \frac{a_2}{a_1 + a_2}P_2\right) + a_3P_3 = (a_1 + a_2)R + a_3P_3$$

onde

$$R = \frac{a_1}{a_1 + a_2}P_1 + \frac{a_2}{a_1 + a_2}P_2 \in \mathcal{A}. \tag{1.1.4}$$

Com efeito, se R é o ponto definido em (1.1.4), então $X = a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} X &= R + a_1\overrightarrow{RP_1} + a_2\overrightarrow{RP_2} + a_3\overrightarrow{RP_3} = R + a_3\overrightarrow{RP_3} \\ &= (1 - a_3)R + a_3P_3 = (a_1 + a_2)R + a_3P_3, \end{aligned}$$

pois $a_1\overrightarrow{RP_1} + a_2\overrightarrow{RP_2} = 0$, uma vez que, por (1.1.4), temos

$$R = R + \frac{a_1}{a_1 + a_2}\overrightarrow{RP_1} + \frac{a_2}{a_1 + a_2}\overrightarrow{RP_2}.$$

Em geral temos o seguinte resultado.

TEOREMA 1.1.25. *O subespaço afim gerado por um conjunto S de $\mathcal{A}$ é o conjunto de todas as combinações afins de pontos de S.*

Demonstração: Seja P um ponto de S e $\langle S\rangle = P + W$ o subespaço afim gerado por S.

Vejamos primeiro que qualquer combinação afim de pontos de S está em $\langle S\rangle$. Com efeito, se Q é uma combinação afim de pontos $P_0, \ldots, P_m \in S$, temos

$$Q = P_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i\overrightarrow{P_0P_i},$$

com $a_i \in K$, e então, como os vectores $\overrightarrow{P_0P_i}$ estão em W, temos que $Q \in \langle S\rangle$.

Resta mostrar que o conjunto de todas as combinações afins de pontos de S contém $\langle S\rangle$. Como obviamente contém S, basta mostrar que é um subespaço afim de $\mathcal{A}$ (pois $\langle S\rangle$ está contido em todos os subespaços afins que contêm S). Seja U o subespaço vectorial de V gerado pelos vectores da forma $\overrightarrow{PQ}$ com $Q \in S$. Como qualquer combinação afim

$$R + \sum_{j=1}^{k} b_j\overrightarrow{RP_j}$$

de pontos de S pode ser escrita na forma

$$R + \sum_{j=1}^{k} b_j\overrightarrow{RP_j} = b_0R + \sum_{j=1}^{k} b_jP_j = P + b_0\overrightarrow{PR} + \sum_{i=1}^{k} b_j\overrightarrow{PP_j},$$

com $b_0 = 1 - \sum_{i=1}^{k} b_j$, temos que qualquer combinação afim de pontos de S está no subespaço afim $P + U$. Além disso, qualquer ponto de $P + U$ é uma combinação afim de pontos de S, pelo que o conjunto de todas as combinações afins de pontos de S é o subespaço afim $P + U$. □

1.1.7. Referenciais. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim de dimensão finita n associado a um espaço vectorial V. Um **referencial** R em $\mathcal{A}$ é um conjunto

$$R := (O; (e_1, \ldots, e_n))$$

onde O é um ponto de $\mathcal{A}$ e $B = (e_1, \ldots, e_n)$ uma base de V. O ponto O chama-se a **origem** do referencial.

A escolha de um referencial permite-nos identificar os pontos de $\mathcal{A}$ com elementos de K^n, da seguinte forma

$$P \to \overrightarrow{OP} \to \overrightarrow{OP}_B \in K^n,$$

onde $\overrightarrow{OP}_B$ é o vector de coordenadas de $\overrightarrow{OP}$ em relação à base B. Com efeito, dado um ponto P existe um único vector v tal que $v = \overrightarrow{OP}$. Por outro lado, como B é uma base de V, o vector v escreve-se de forma única como $v = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$, pelo que podemos identificar P com o vector de coordenadas de v em relação à base B

$$P \to v_B = (a_1, \ldots, a_n).$$

Diz-se que $(a_1, \ldots, a_n)$ são as coordenadas de P em relação ao referencial $R = (O; (e_1, \ldots, e_n))$ e escreve-se $P_R = (a_1, \ldots, a_n)$.

No espaço afim K^n , com a estrutura canónica, chama-se **referencial canónico** ao referencial em que o ponto O é o elemento $(0, \ldots, 0)$ e a base B é a base canónica $(e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 1))$.

EXEMPLO 1.1.26. Num espaço afim real $\mathcal{A}$ de dimensão 3, seja

$$R = (O; (e_1, e_2, e_3))$$

um referencial. As coordenadas do ponto $P = O + 3e_1 - 2e_3$ em relação a R são $P_R = (3, 0, -2)$.

O ponto Q cujas coordenadas, em relação a R são $Q_R = (5, 7, 9)$ é o ponto $Q = O + 5e_1 + 7e_2 + 9e_3$.

EXEMPLO 1.1.27. No espaço afim $\mathbb{R}^2$ seja $R = (O; (e_1, e_2))$ o referencial em que $O = (2, 3)$, $e_1 = (1, 1)$ e $e_2 = (1, 0)$.

Se P é o ponto $(6, 3)$ (no referencial canónico), temos $\overrightarrow{OP} = (4, 0)$. Como $(4, 0) = 4e_2$, as coordenadas de P em relação ao referencial R são $P_R = (0, 4)$.

O ponto Q com coordenadas $Q_R = (2, 3)$ no referencial R é o ponto

$$Q = O + 2e_1 + 3e_2 = (2, 3) + (2, 2) + (3, 0) = (7, 5).$$

1.1.8. Sistemas de equações e subespaços afins.

TEOREMA 1.1.28. *Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim de dimensão n com um referencial $R = (O; (e_1, ..., e_n))$.*

1. *Seja*

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{1.1.5}$$

um sistema de m equações lineares nas incógnitas $x_1, ..., x_n \in K$. Se o sistema for possível, o conjunto $\mathcal{S}$ de pontos de $\mathcal{A}$, cujas coordenadas em relação a R são soluções do sistema, é um subespaço afim com dimensão igual ao grau de indeterminação do sistema. O subespaço vectorial U de direcções de $\mathcal{S}$ é o conjunto de vectores cujas coordenadas em relação à base $(e_1, ..., e_n)$ são definidas pelo sistema homogéneo associado, ou seja

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n & = & 0. \end{array}\right. \tag{1.1.6}$$

2. *Inversamente, se $\mathcal{F}$ é um subespaço afim de $\mathcal{A}$ de dimensão k, existe um sistema de equações lineares a n incógnitas, possível e de característica $n-k$, tal que $\mathcal{F}$ é o o conjunto de pontos de $\mathcal{A}$ cujas coordenadas em relação a R são soluções do sistema.*

Demonstração: Considere-se em $\mathcal{A}$ o referencial $R = (O; B = (e_1, \ldots, e_n))$.

1. Sabemos que as soluções de um sistema linear não homogéneo se obtêm somando a uma solução particular do sistema as soluções do sistema homogéneo associado. Além disso, os vectores de V cujas coordenadas na base B são soluções de um sistema linear homogéneo, formam um subespaço vectorial de V de dimensão igual à nulidade do sistema. Assim, se $(c_1, \ldots, c_n)$ é uma solução particular do sistema não homogéneo (1.1.5) e $P_0 \in \mathcal{A}$ é o ponto com coordenadas no referencial R dadas por

$$(P_0)_R = (c_1, \ldots, c_n),$$

temos que os pontos de $\mathcal{A}$ cujas coordenadas são soluções do sistema (1.1.5) formam um subespaço afim $\mathcal{S} = P_0 + W$, onde W é o subespaço vectorial de V formado pelos vectores cujas coordenadas na base B são soluções do sistema homogéneo associado (1.1.6).

2. Seja W o espaço das direcções de um subespaço afim $\mathcal{F} = P_0 + W$. As coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ dos vectores de W na base B satisfazem um sistema homogéneo de $m = n - k$ equações independentes

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0, \tag{1.1.7}$$

em que $k = \dim W$ e A é uma matriz $m \times n$. Se

$$(P_0)_R = (c_1, \ldots, c_n)$$

forem as coordenadas do ponto P_0 no referencial R, as coordenadas de um ponto $P \in \mathcal{F}$ são

$$P_R = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) = (c_1, \ldots, c_n) + (x_1, \ldots, x_n),$$

onde o vector de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ é solução do sistema (1.1.7). Assim, $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ é solução do sistema

$$A \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

□

Corolário 1.1.29. *Um subconjunto $\mathcal{F}$ de um espaço afim $\mathcal{A}$ de dimensão n é um subespaço afim se e só se for não vazio e o conjunto de coordenadas dos pontos de $\mathcal{F}$ em relação a algum referencial for o conjunto solução de um sistema de equações lineares a n incógnitas.*

Exemplo 1.1.30. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim associado a um espaço vectorial real V de dimensão 4 e seja $R = (O; B)$ um referencial de $\mathcal{A}$, onde B é uma base (e_1, e_2, e_3, e_4) de V. Consideremos o subespaço afim $\mathcal{F} = P + W$ onde P é o ponto

$$P = O + (e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4)$$

e W é a expansão linear dos vectores

$$v_1 := 2e_1 - e_2, \quad v_2 := e_2 - e_4 \quad \text{e} \quad v_3 := 4e_1 - 2e_4.$$

As coordenadas de P em relação a R são $P_R = (1, 2, 3, 4)$, enquanto que

$$(v_1)_B = (2, -1, 0, 0), \quad (v_2)_B = (0, 1, 0, -1) \quad \text{e} \quad (v_3)_B = (4, 0, 0, -2).$$

Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Um vector v de coordenadas $v_B = (x, y, z, w)$ pertence à expansão linear de v_1, v_2, v_3 se e só se a característica da matriz

$$A' := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & x \\ -1 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & -1 & -2 & w \end{bmatrix}$$

é igual à característica da matriz A (ou seja igual a 2). Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A', obtemos a matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & y \\ 0 & -1 & -2 & w \\ 0 & 0 & 0 & x + 2y + 2w \\ 0 & 0 & 0 & z \end{bmatrix},$$

que deverá ter também característica 2. Cncluímos assim que $\mathcal{F}$ é um plano e que um vector v de coordenadas $v_B = (x, y, z, w)$ pertence à expansão linear de v_1, v_2, v_3 se e só $z = 0$ e $x + 2y + 2w = 0$. Então o subespaço vectorial W é

$$\begin{aligned} W &= \{x\, e_1 + y\, e_2 + z\, e_3 + w\, e_4 : \ x, y, z, w \in \mathbb{R},\ z = 0 \ \text{ e } \ x + 2y + 2w = 0\} \\ &= \mathcal{L}\{-2e_1 + e_2, -2e_1 + e_4\}. \end{aligned}$$

Como o ponto $P \in \mathcal{F}$ e as coordenadas de P em relação a R são $(1, 2, 3, 4)$, o subespaço $\mathcal{F}$ é dado por

$$\mathcal{F} = \{O + x\, e_1 + y\, e_2 + z\, e_3 + w\, e_4 : \ x, y, z, w \in \mathbb{R} \quad z = 3 \quad \text{e} \quad x + 2y + 2w = 13\}.$$

1.2. Espaços afins reais

1.2.1. Algumas definições. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim **real**.

DEFINIÇÃO 1.2.1. *Dados dois pontos distintos P, Q de $\mathcal{A}$ o* **segmento de recta com extremidades** P **e** Q *(ou* **definido por** P *e* Q*) é o conjunto*

$$[PQ] := \{X \in \mathcal{A} : X = P + \lambda\, \overrightarrow{PQ},\ 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

NOTA 1.2.2. Usando combinações afins podemos escrever

$$[PQ] := \{X \in \mathcal{A} : X = a\,P + b\,Q,\ a \geq 0,\ b \geq 0,\ \ a + b = 1\}.$$

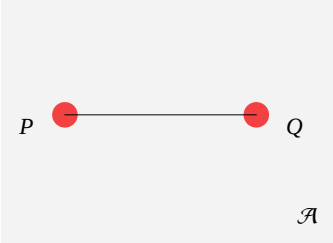

FIGURA 1.4. Segmento de recta com extremidades P e Q

DEFINIÇÃO 1.2.3. *Dados dois pontos distintos P e Q de $\mathcal{A}$, o* **ponto médio** *do segmento de recta $[PQ]$ é o ponto $M := P + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$ (ou seja o ponto $M = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q$).*

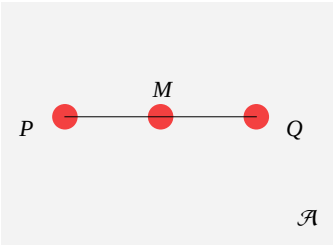

FIGURA 1.5. Ponto médio do segmento de recta $[PQ]$

DEFINIÇÃO 1.2.4. *Dados dois pontos distintos $P, Q \in \mathcal{A}$ a* **semi-recta com origem em P que passa em Q** *(ou* **com origem em P e direcção $\overrightarrow{PQ}$***), é o conjunto*

$$\{X \in \mathcal{A} : X = P + \lambda\,\overrightarrow{PQ},\ \lambda \geq 0\}.$$

DEFINIÇÃO 1.2.5. *Dados três pontos distintos $P, Q, R \in \mathcal{A}$ o* **paralelogramo** *(PQR) é o conjunto*

$$\{X \in \mathcal{A} : X = P + \lambda\,\overrightarrow{PQ} + \mu\,\overrightarrow{PR},\ 0 \leq \lambda, \mu \leq 1\}.$$

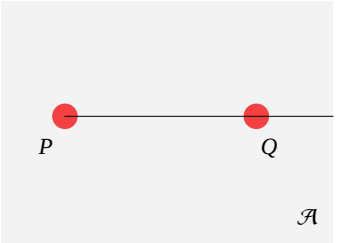

FIGURA 1.6. Semi-recta com origem em P e que passa em Q

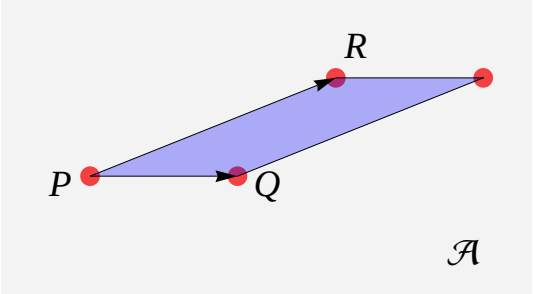

FIGURA 1.7. Paralelogramo (PQR)

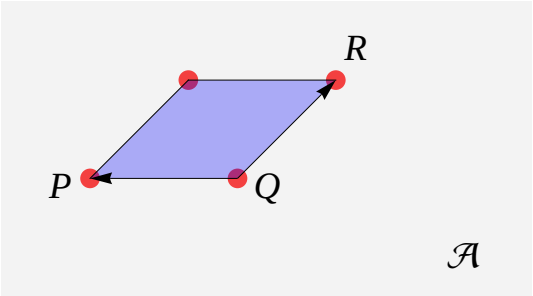

FIGURA 1.8. Paralelogramo (QPR)

NOTA 1.2.6. O paralelogramo (QPR) é diferente do paralelogramo (PQR).

DEFINIÇÃO 1.2.7. *Dados $m+1$ pontos independentes $P_0, \ldots, P_m \in \mathcal{A}$ o* m**-simplex** *definido por $P_0, \ldots, P_m$ é o conjunto*

$$\{X \in \mathcal{A} : \ X = P_0 + a_1\overrightarrow{P_0P_1} + a_2\overrightarrow{P_0P_2} + \cdots + a_m\overrightarrow{P_0P_m},$$
$$0 \leq a_1, \ldots, a_m, a_1 + \cdots + a_m \leq 1\} =$$
$$\{X \in \mathcal{A} : \ X = a_0P_0 + a_1P_1 + \cdots + a_mP_m,$$
$$a_0, a_1, \ldots, a_m \geq 0 \ \text{ e } \ a_0 + a_1 + \cdots + a_m = 1\}.$$

Um 1-simplex é um segmento de recta e um 0-simplex é um ponto.

Dado um m-simplex definido por $m+1$ pontos independentes

$$P_0, \ldots, P_m \in \mathcal{A},$$

chamam-se **vértices** do simplex aos pontos $P_0, \ldots, P_m$. Qualquer subconjunto de $\{P_0, \ldots, P_m\}$ com $k+1$ pontos ($k < m$) define um k-simplex, a que se dá o nome de **face** do m-simplex. Uma **aresta** do simplex é uma face que é um 1-simplex.

Um 3-simplex é também denominado por **tetraedro** e um 2-simplex por **triângulo**. Dado um triângulo de vértices P, Q e R, os segmentos de recta $[PQ], [PR]$ e $[RQ]$ dizem-se os **lados** do triângulo.

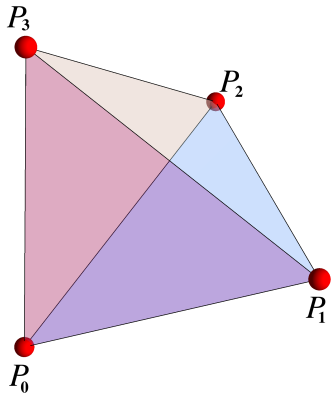

FIGURA 1.9. 3-simplex definido pelos pontos P_0, P_1, P_2 e P_3.

DEFINIÇÃO 1.2.8. *Uma* **mediana** *de um triângulo é uma recta que passa por um vértice do triângulo e pelo ponto médio do lado oposto (i.e. o lado que não contém esse vértice).*

Um triângulo tem exactamente três medianas e estas satisfazem a seguinte propriedade.

TEOREMA 1.2.9. *As três medianas de um triângulo intersectam-se num mesmo ponto.*

Demonstração: Sejam P_0, P_1, P_2 os vértices do triângulo. Basta verificar que o ponto $B := \frac{1}{3}P_0 + \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2$ (em notação homogénea) pertence às três medianas. □

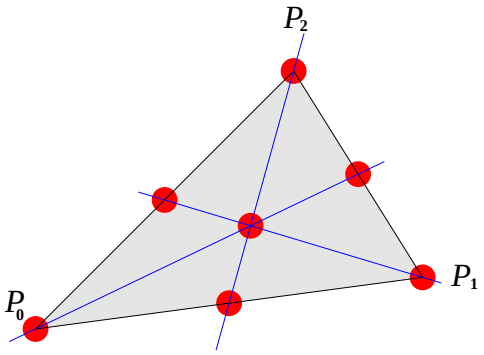

FIGURA 1.10. As três medianas de um triângulo.

DEFINIÇÃO 1.2.10. *Chama-se* **centroide**, **equibaricentro** *ou* **centro geométrico** *de um triângulo é o ponto de interseção das três medianas.*

As noções acima só fazem sentido para espaços afins sobre corpos de escalares em que haja uma relação de ordem (como $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$) em que se possa dizer que um escalar é menor que outro. Por exemplo, se $\mathcal{A}$ for um espaço afim complexo, não podemos definir um segmento de recta.

NOTA 1.2.11. Claro que, dados dois pontos P, Q de um espaço afim complexo $\mathcal{A}$ podemos considerar o conjunto

$$\{X \in \mathcal{A} : X = P + \lambda \overrightarrow{PQ}, \text{ com } \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } 0 \leq \lambda \leq 1\},$$

mas este não é um segmento da recta complexa que passa em P e Q.

Há, no entanto, noções que se podem adaptar para espaços afins sobre outros corpos. Por exemplo, o ponto médio de dois pontos distintos P e Q pode ser definido (mesmo não sendo possível definir segmento de recta) como o ponto $M := P + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$. Em qualquer corpo K existe uma identidade 1 para a multiplicação, e o escalar $\frac{1}{2}$ significa o inverso de $1+1$. Assim, o ponto médio está definido desde que, em K, o elemento $1+1$ não seja o zero de K (ver Apêndice A).

Em geral, num espaço afim real ou complexo temos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 1.2.12. *Dados k pontos distintos $P_0, \ldots, P_{k-1}$ de um espaço afim real ou complexo chama-se* **centroide**, **equibaricentro** *ou* **centro geométrico** *dos k pontos ao ponto*

$$B := \frac{1}{k}P_0 + \cdots + \frac{1}{k}P_{k-1}.$$

1.2.2. Conjuntos convexos.

DEFINIÇÃO 1.2.13. *Um subconjunto C de um espaço afim* **real** *diz-se um* **conjunto convexo** *se, para quaisquer dois pontos $P, Q \in C$, o segmento de recta $[PQ]$ está contido em C.*

Da definição de conjunto convexo segue obviamente que a intersecção de dois conjuntos convexos é ainda um conjunto convexo. Em geral tem-se o seguinte resultado.

TEOREMA 1.2.14. *A intersecção de conjuntos convexos de um mesmo espaço afim real $\mathcal{A}$ é ainda um conjunto convexo.*

Demonstração: Seja $\{C_\alpha\}$, com $\alpha \in I$ uma família qualquer de conjuntos convexos de $\mathcal{A}$. Se $P, Q \in \cap_{\alpha\in I} C_\alpha$ então $P, Q \in C_\alpha$ para qualquer $\alpha \in I$. Como, por hipótese, cada C_α é um conjunto convexo, para todo o $\alpha \in I$, temos que

$$[PQ] \subseteq C_\alpha, \ \forall \alpha \in I$$

e então $[PQ] \subseteq \cap_{\alpha\in I} C_\alpha$. Conclui-se assim que o conjunto $\cap_{\alpha\in I} C_\alpha$ é convexo. □

NOTA 1.2.15. A união de dois conjuntos convexos não é, em geral, um conjunto convexo.

DEFINIÇÃO 1.2.16. *Num espaço afim real $\mathcal{A}$, o* **fecho convexo** *(ou* **invólucro convexo***), $\widehat{S}$, de um conjunto $S \subseteq \mathcal{A}$ é a intersecção de todos os conjuntos convexos de $\mathcal{A}$ que contêm S. É portanto o menor conjunto convexo que contém S.*

DEFINIÇÃO 1.2.17. *Dados $m+1$ pontos $P_0, \ldots, P_m$ de um espaço afim real $\mathcal{A}$, um ponto Q diz-se uma* **combinação convexa** *dos pontos $P_0, \ldots, P_m$ se*

$$Q = \sum_{i=0}^{m} b_i P_i$$

com $b_i \geq 0$ para todo o $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $\sum_{i=0}^{m} b_i = 1$.

Alternativamente, uma combinação convexa de pontos é dada por

$$Q = P_0 + \sum_{i=1}^{m} b_i \overrightarrow{P_0 P_i} \quad \text{com} \quad b_i \geq 0, \ \forall i = 1, \ldots, m \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{m} b_i \leq 1.$$

NOTA 1.2.18. O conjunto de todas as combinações convexas de dois pontos distintos $P, Q \in \mathcal{A}$ é exactamente o segmento de recta $[PQ]$.

TEOREMA 1.2.19. *Um subconjunto C de um espaço afim real $\mathcal{A}$ é convexo se e só se contém todas as combinações convexas de pontos de C.*

Demonstração: Suponhamos que um conjunto C contém todas as combinações convexas dos seus pontos. Em particular, para quaisquer $P, Q \in C$, o segmento $[PQ]$ está contido em C, pelo que C é convexo.

Por outro lado, se C é convexo, vamos mostrar por indução no número de pontos de uma combinação convexa, que qualquer combinação convexa de um número finito de pontos de C pertence a C.

Obviamente, por definição de conjunto convexo, uma combinação convexa de dois pontos de C está em C. Seja

$$Q = \sum_{i=0}^{m} b_i\, P_i \quad \text{com} \quad b_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, m \quad \text{e} \quad \sum_{i=0}^{m} b_i = 1$$

uma combinação convexa de $m+1$ pontos $P_0, \ldots, P_m \in C$ e tome-se como hipótese de indução que qualquer combinação convexa de m ou menos pontos de C está em C.

Considerando $b := \sum_{i=0}^{m-1} b_i$ temos $b_m = 1 - b$. Como qualquer combinação convexa de m ou menos pontos de C está em C, podemos supor que $b_i \neq 0$ para todo o $i = 0, \ldots, m$ e portanto $b \neq 0$. Então tem-se

$$Q = b \left(\sum_{i=0}^{m-1} \frac{b_i}{b}\, P_i \right) + (1-b) P_m$$

(ver Nota 1.1.24). Como $R := \sum_{i=0}^{i=m-1} \frac{b_i}{b}\, P_i$ é uma combinação convexa dos m pontos

$$P_0, \ldots, P_{m-1} \in C,$$

temos, por hipótese de indução, que R pertence a C. Como $Q = bR + (1-b)P_m$ pertence ao segmento de recta $[RP_m]$ e C é convexo, conclui-se que Q pertence a C. □

COROLÁRIO 1.2.20. *O fecho convexo $\widehat{S}$ de qualquer conjunto $S \subseteq \mathcal{A}$ é o conjunto de todas as combinações convexas de pontos de S.*

EXEMPLO 1.2.21. Os conjuntos seguintes são convexos:

- qualquer segmento de recta;
- qualquer semi-recta;
- qualquer m-simplex;
- qualquer m-plano.

NOTA 1.2.22. O fecho convexo de $m+1$ pontos independentes é exactamente o m-simplex definido por esses pontos.

1.2.3. Divisão por hiperplanos.

DEFINIÇÃO 1.2.23. *Seja $\mathcal{H}$ um hiperplano de um espaço afim **real** $\mathcal{A}$ de dimensão finita. Diz-se que dois pontos $P, Q \notin \mathcal{H}$ estão do mesmo lado de $\mathcal{H}$ se o segmento de recta $[PQ]$ não intersecta $\mathcal{H}$.*

Pode demonstrar-se que a relação entre pontos de $\mathcal{A} \setminus \mathcal{H}$ definida por

$$P \sim Q \quad \text{se} \quad P = Q \quad \text{ou} \quad [PQ] \cap \mathcal{H} = \emptyset$$

é uma relação de equivalência com exactamente duas classes de equivalência (ou seja um hiperplano tem exactamente dois lados).

Se $\dim \mathcal{A} = n$ e o hiperplano $\mathcal{H}$ for definido em relação a um referencial R de $\mathcal{A}$ pela equação

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b,$$

então estas classes de equivalência são exactamente os conjuntos

$$\mathcal{H}^+ := \{P \in \mathcal{A} : \ P_R = (x_1, \ldots, x_n) \quad \text{satisfaz} \quad a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n - b > 0\}$$
$$\mathcal{H}^- := \{P \in \mathcal{A} : \ P_R = (x_1, \ldots, x_n) \quad \text{satisfaz} \quad a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n - b < 0\}.$$

Cada uma destas classes de equivalência chama-se **semi-espaço aberto** definido por $\mathcal{H}$.

Um **semi-espaço fechado** definido por $\mathcal{H}$ é a união de $\mathcal{H}$ com um semi-espaço aberto definido por $\mathcal{H}$, ou seja,

$$\mathcal{H}_0^+ := \{P \in \mathcal{A} : P_R = (x_1, \ldots, x_n) \quad \text{satisfaz} \quad a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n - b \geq 0\}$$
$$\mathcal{H}_0^- := \{P \in \mathcal{A} : P_R = (x_1, \ldots, x_n) \quad \text{satisfaz} \quad a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n - b \leq 0\}.$$

Um semi-espaço aberto ou fechado é sempre um conjunto convexo.

1.3. Aplicações afins

DEFINIÇÃO 1.3.1. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dois espaços afins associados a espaços vectoriais V e W respectivamente. Uma aplicação $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ diz-se uma* **aplicação afim** *se existe um ponto $P \in \mathcal{A}$ e uma aplicação linear $f : V \to W$ tais que*

$$\overrightarrow{\psi(P)\psi(Q)} = f(\overrightarrow{PQ})$$

para todo o ponto $Q \in \mathcal{A}$.

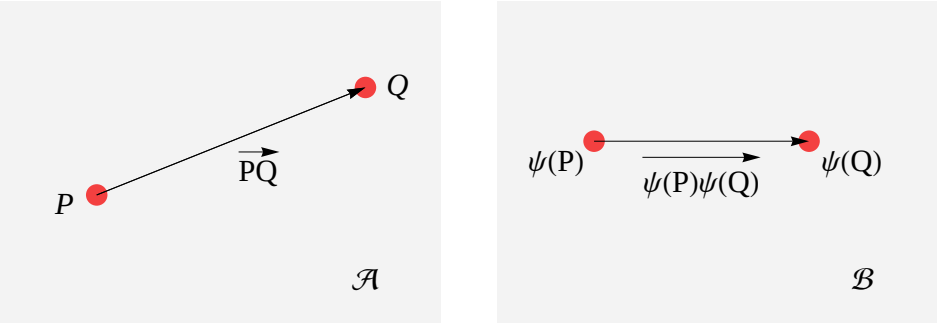

FIGURA 1.11. Aplicações Afins

NOTA 1.3.2. A aplicação linear f não depende da escolha do ponto P. Com efeito, se P' for um outro ponto de $\mathcal{A}$ qualquer, temos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\psi(P')\psi(Q)} &= \overrightarrow{\psi(P')\psi(P)} + \overrightarrow{\psi(P)\psi(Q)} = -\overrightarrow{\psi(P)\psi(P')} + \overrightarrow{\psi(P)\psi(Q)} \\ &= -f(\overrightarrow{PP'}) + f(\overrightarrow{PQ}) = f(\overrightarrow{P'P}) + f(\overrightarrow{PQ}) = f(\overrightarrow{P'Q}),\end{aligned}$$

onde usámos a relação triangular e a linearidade de f. Como f depende apenas de ψ chamamos-lhe $\overrightarrow{\psi}$, a **aplicação linear associada à aplicação afim** ψ. Então temos

$$\overrightarrow{\psi(P)\psi(Q)} = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{PQ})$$

para todos os pontos $P, Q \in \mathcal{A}$.

Em particular,

$$\overrightarrow{\psi(P)\psi(P+u)} = \overrightarrow{\psi}(u),$$

para todo o $P \in \mathcal{A}$ e $u \in V$, pelo que

$$\psi(P+u) = \psi(P) + \overrightarrow{\psi}(u). \tag{1.3.1}$$

PROPOSIÇÃO 1.3.3. *A composta de duas aplicações afins é uma aplicação afim com aplicação linear associada a composta das aplicações lineares associadas a cada uma das aplicações afins.*

Demonstração: Sejam $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $\phi : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ duas aplicações afins e P, P' dois pontos de $\mathcal{A}$ quaisquer. Então

$$\begin{aligned}\overrightarrow{(\phi\circ\psi)(P)(\phi\circ\psi)(P')} &= \overrightarrow{\phi(\psi(P))\phi(\psi(P'))} = \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{\psi(P)\psi(P')}) \\ &= \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{PP'})) = \left(\overrightarrow{\phi}\circ\overrightarrow{\psi}\right)(\overrightarrow{PP'}).\end{aligned}$$

Conclui-se assim que $\phi \circ \psi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ é uma aplicação afim e que

$$\overrightarrow{\phi\circ\psi} = \overrightarrow{\phi}\circ\overrightarrow{\psi}.$$

□

EXEMPLO 1.3.4.

1. Se $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ e $\overrightarrow{\psi} : V \to V$ é a identidade, temos
$$\overrightarrow{\psi(P)\psi(Q)} = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{PQ}, \quad \forall P, Q \in \mathcal{A}.$$
Então, pela regra do paralelogramo, temos
$$\overrightarrow{P\psi(P)} = \overrightarrow{Q\psi(Q)}, \quad \forall P, Q \in \mathcal{A},$$
(ver Figura 1.12), pelo que $\overrightarrow{P\psi(P)}$ é um vector constante $u \in V$ e
$$\psi(P) = P + u, \quad \forall P \in \mathcal{A}.$$
A aplicação ψ é então a **translação** associada ao vector u.

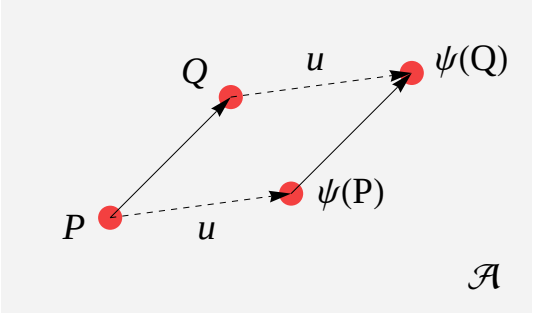

FIGURA 1.12. Translação associada ao vector u

2. Seja P_0 um ponto de $\mathcal{A}$ e $\lambda \in K$ um escalar. A aplicação $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ definida por
$$\psi(P) = P_0 + \lambda\overrightarrow{P_0P} \tag{1.3.2}$$
fixa P_0 e satisfaz
$$\overrightarrow{\psi(P_0)\psi(P)} = \lambda\overrightarrow{P_0P}, \quad \forall P \in \mathcal{A}.$$
Conclui-se assim que ψ é uma aplicação afim com aplicação linear associada $\overrightarrow{\psi} : V \to V$ dada por
$$\overrightarrow{\psi}(v) = \lambda v.$$
A aplicação ψ definida por (1.3.2) designa-se por **dilatação de centro** P_0 e **factor** (ou **razão**) λ.

Como a imagem de um subespaço vectorial por uma aplicação linear é um subespaço vectorial temos o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 1.3.5. *A imagem de um subespaço afim por uma aplicação afim é um subespaço afim.*

Demonstração: Seja $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ uma aplicação afim e $\mathcal{F} = P + W$ um subespaço afim de $\mathcal{A}$. Então $\psi(\mathcal{F})$ é o subespaço afim de $\mathcal{B}$

$$\psi(\mathcal{F}) = \psi(P) + \overrightarrow{\psi}(W).$$

Com efeito, se $Q \in \mathcal{F}$, existe um vector $w \in W$ tal que $Q = P + w$. Então, por (1.3.1) temos

$$\psi(Q) = \psi(P) + \overrightarrow{\psi}(w),$$

pelo que $\psi(\mathcal{F}) \subseteq \psi(P) + \overrightarrow{\psi}(W)$.

Por outro lado, se $R \in \psi(P) + \overrightarrow{\psi}(W)$, existe um vector $w \in W$ tal que

$$R = \psi(P) + \overrightarrow{\psi}(w) = \psi(P + w),$$

pelo que $R \in \psi(\mathcal{F})$ e então $\psi(P) + \overrightarrow{\psi}(W) \subseteq \psi(\mathcal{F})$. □

NOTA 1.3.6. Como a imagem de um subespaço vectorial por uma aplicação linear tem dimensão menor ou igual à dimensão do subespaço inicial, conclui-se que

$$\dim \psi(\mathcal{F}) \leq \dim \mathcal{F}.$$

COROLÁRIO 1.3.7. *Uma aplicação afim transforma pontos colineares em pontos colineares.*

1.3.1. Aplicações afins e referenciais.

PROPOSIÇÃO 1.3.8. *Seja $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ uma aplicação afim, onde $\mathcal{A}$ é um espaço afim de dimensão finita n e $R := (O; B)$ um referencial em $\mathcal{A}$, com $B = (e_1, \ldots, e_n)$ uma base do espaço vectorial associado a $\mathcal{A}$. A aplicação ψ é determinada pela imagem $\psi(O)$ da origem do referencial e pelas imagens $\overrightarrow{\psi}(e_i)$ dos vectores da base B pela aplicação linear associada a ψ.*

Demonstração: Seja $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ uma aplicação afim, onde $\mathcal{A}$ é um espaço afim de dimensão finita n e $R := (O; (e_1, \ldots, e_n))$ um referencial em $\mathcal{A}$. A aplicação ψ fica completamente determinada pelas imagens $\psi(O)$ e $\overrightarrow{\psi}(e_1), \ldots, \overrightarrow{\psi}(e_n)$. Com efeito, se $P_R = (a_1, \ldots, a_n)$ são as coordenadas de um ponto P no referencial R, temos

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$$

e

$$\psi(P) = \psi(O) + \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{OP}) = \psi(O) + \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{\psi}(e_i).$$

□

Seja $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ uma aplicação afim entre espaços afins de dimensão finita n e m respectivamente, e R, R' referenciais em $\mathcal{A}$ e em $\mathcal{B}$. Se representarmos por $(x_1, \ldots, x_n)$ as coordenadas dos pontos de $\mathcal{A}$ no referencial R e por $(y_1, \ldots, y_m)$ as coordenadas dos pontos de $\mathcal{B}$ no referencial R' podemos usar estas coordenadas e pensar em ψ como uma aplicação afim

$$K^n \to K^m.$$

Assim, se $(x_1, \ldots, x_n)$ são as coordenadas de um ponto $P \in \mathcal{A}$ no referencial R e $(y_1, \ldots, y_m)$ as coordenadas do ponto $\psi(P)$ no referencial R', temos

$$(\psi(P))_{R'} = (\psi(O))_{R'} + \sum_{i=1}^{n} x_i (\overrightarrow{\psi}(e_i))_{B'},$$

ou seja

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

onde A é a matriz $m \times n$ cujas colunas são as coordenadas $(\overrightarrow{\psi}(e_i))_{B'}$ dos vectores $\overrightarrow{\psi}(e_i)$ na base B', para $i = 1, \ldots, n$, e $(b_1, \ldots, b_m)$ são as coordenadas $(\psi(O))_{R'}$ do ponto $\psi(O)$ no referencial R'.

1.3.2. Pontos Fixos. Como uma aplicação afim fica determinada pela imagem da origem de um referencial em conjunto com as imagens dos vectores da base do referencial pela aplicação linear correspondente, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.3.9. *A única aplicação afim dum espaço afim de dimensão n nele próprio que fixa $n+1$ pontos independentes é a identidade.*

Demonstração: Seja $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ uma aplicação afim num espaço afim de dimensão n e $P_0, \ldots, P_n$ pontos independentes de $\mathcal{A}$ fixos por ψ. Considere-se em $\mathcal{A}$ o referencial

$$R = \left(P_0; \left(\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\right)\right).$$

Dado um ponto $P \in \mathcal{A}$, sejam $P_R = (a_1, \ldots, a_n)$ as coordenadas de P no referencial R. Então

$$\psi(P) = \psi(P_0) + \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{P_0P}) = \psi(P_0) + \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{P_0P_i})$$
$$= P_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{\psi(P_0)\psi(P_i)} = P_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{P_0P_i} = P,$$

pelo que ψ é a identidade. □

Nota 1.3.10. Uma aplicação afim dum plano nele próprio que fixa 3 pontos não colineares é a identidade.

Analogamente temos o seguinte resultado mais geral.

Proposição 1.3.11. *Se uma aplicação afim $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ fixa os pontos $P_0, \ldots, P_k \in \mathcal{A}$ então fixa todos os pontos de $\langle P_0, \ldots, P_k \rangle$.*

Em particular, se uma aplicação afim fixa dois pontos distintos $P, Q \in \mathcal{A}$ fixa também todos os pontos da recta que passa por P e Q.

1.3.3. O grupo afim.

Proposição 1.3.12. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ espaços afins associados a espaços vectoriais V e W respectivamente. Uma aplicação afim $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é bijectiva se e só se a aplicação linear associada $\overrightarrow{\psi} : V \to W$ é bijectiva.*

Além disso, se ψ é bijectiva, então $\psi^{-1} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ é uma aplicação afim e a aplicação linear associada é

$$\overrightarrow{\psi^{-1}} = \left(\overrightarrow{\psi}\right)^{-1}.$$

Demonstração: Seja P_0 um ponto de $\mathcal{A}$.

Se $\overrightarrow{\psi}$ é bijectiva então, para todo o $P \in \mathcal{A}$ e $Q \in \mathcal{B}$, temos

$$\psi(P) = Q \Leftrightarrow \overrightarrow{\psi(P_0)\psi(P)} = \overrightarrow{\psi(P_0)Q} \Leftrightarrow \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{P_0P}) = \overrightarrow{\psi(P_0)Q}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} = \left(\overrightarrow{\psi}\right)^{-1}\left(\overrightarrow{\psi(P_0)Q}\right) \Leftrightarrow P_0 + \overrightarrow{P_0P} = P_0 + \left(\overrightarrow{\psi}\right)^{-1}\left(\overrightarrow{\psi(P_0)Q}\right)$$
$$\Leftrightarrow P = P_0 + \left(\overrightarrow{\psi}\right)^{-1}\left(\overrightarrow{\psi(P_0)Q}\right),$$

pelo que, para **todo** o $Q \in \mathcal{B}$ existe um **único** $P \in \mathcal{A}$ tal que $\psi(P) = Q$. Conclui-se assim que ψ é bijectiva e que a sua inversa é dada por

$$\psi^{-1}(Q) = P_0 + \left(\overrightarrow{\psi}\right)^{-1}\left(\overrightarrow{\psi(P_0)Q}\right).$$

Inversamente, se ψ é bijectiva, então, para todo o $v \in V$ e $w \in W$, temos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\psi}(v) = w \Leftrightarrow \psi(P_0) + \overrightarrow{\psi}(v) = \psi(P_0) + w \Leftrightarrow \psi(P_0 + v) = \psi(P_0) + w \\ \Leftrightarrow P_0 + v = \psi^{-1}\left(\psi(P_0) + w\right) \Leftrightarrow v = \overrightarrow{P_0\psi^{-1}\left(\psi(P_0) + w\right)},\end{aligned}$$

pelo que, para **todo** o $w \in W$ existe um **único** $v \in V$ tal que $\overrightarrow{\psi}(v) = w$. Conclui-se assim que $\overrightarrow{\psi}$ é bijectiva.

Se ψ é bijectiva então, dados $Q_0, Q_1 \in \mathcal{B}$, temos

$$\overrightarrow{\psi}\left(\overrightarrow{\psi^{-1}(Q_0)\psi^{-1}(Q_1)}\right) = \overrightarrow{\psi(\psi^{-1}(Q_0))\psi(\psi^{-1}(Q_1))} = \overrightarrow{Q_0Q_1},$$

pelo que

$$\overrightarrow{\psi^{-1}(Q_0)\psi^{-1}(Q_1)} = \left(\overrightarrow{\psi}\right)^{-1}\left(\overrightarrow{Q_0Q_1}\right).$$

Conclui-se assim que ψ^{-1} é uma aplicação afim e que $\overrightarrow{\psi^{-1}} = \left(\overrightarrow{\psi}\right)^{-1}$. □

EXEMPLO 1.3.13. Seja $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação afim definida por

$$\psi(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

A aplicação linear associada a ψ é a aplicação $\overrightarrow{\psi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\overrightarrow{\psi}(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Como

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = -4 \neq 0,$$

temos que ψ e $\overrightarrow{\psi}$ são bijectivas. Sendo A a matriz $A := \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, temos

$$\begin{aligned}\psi(x, y) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - 6 \\ v + 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} u - 6 \\ v + 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

e então

$$\psi^{-1}(u, v) = A^{-1}\begin{pmatrix} u - 6 \\ v + 4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u - 6 \\ v + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u + \frac{3}{2}v + 12 \\ \frac{u}{2} - \frac{v}{2} - 5 \end{pmatrix}.$$

A aplicação linear associada a ψ^{-1} é a aplicação $\left(\overrightarrow{\psi}\right)^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$(\overrightarrow{\psi})^{-1}(x,y) = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Se $\mathcal{A}$ é um espaço afim, o conjunto $GAf(\mathcal{A})$ de todas as aplicações afins bijectivas de $\mathcal{A}$ nele próprio com a composição de aplicações forma um grupo (ver Apêndice A), denominado **grupo afim** de $\mathcal{A}$. Com efeito,

- pela Proposição 1.3.3, o conjunto $GAf(\mathcal{A})$ é fechado para a composição de aplicações;
- a composição de aplicações é associativa;
- a identidade $id_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é uma aplicação afim bijectiva e é o elemento neutro da composição;
- pela Proposição 1.3.12 os elementos de $GAf(\mathcal{A})$ têm inversa em $GAf(\mathcal{A})$.

Os elementos de $GAf(\mathcal{A})$ denominam-se **isomorfismos afins**.

1.4. Exercícios

EXERCÍCIO 1.4.1. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim associado a um espaço vectorial V. Sendo P, Q pontos de $\mathcal{A}$ e v, w vectores de V, quais das seguintes expressões fazem sentido e quais os seus significados nesses casos?

a) $P + 2v$;	*b)* $v - w$;	*c)* $2v$;
d) $2P$;	*e)* $P - Q$;	*f)* $P - 2Q$;
g) $P + Q$;	*h)* $-P$.	

EXERCÍCIO 1.4.2. Mostre que se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são dois espaços afins associados a espaços vectoriais sobre o mesmo corpo então o produto cartesiano $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ é um espaço afim.

EXERCÍCIO 1.4.3. Mostre que se P, Q são dois pontos distintos de um espaço afim $\mathcal{A}$, existe uma e uma só recta de $\mathcal{A}$ que contém P e Q (isto é, por dois pontos distintos passa uma e uma só recta).

EXERCÍCIO 1.4.4. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim. Mostre que dois subespaços afins associados ao mesmo subespaço vectorial ou são disjuntos ou são iguais.

EXERCÍCIO 1.4.5. Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ dois subespaços afins de um espaço afim $\mathcal{A}$. Quando é que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ é um subespaço afim de $\mathcal{A}$?

EXERCÍCIO 1.4.6. Sejam V e W dois espaços vectoriais e seja

$$f : V \to W$$

uma aplicação linear. Mostre que para todo o vector $w \in f(V)$, a pre-imagem[2] $f^{-1}(w)$ é um subespaço afim de V (onde se considera em V a sua estrutura natural de espaço afim).

EXERCÍCIO 1.4.7. Indique quais dos seguintes conjuntos de $\mathbb{R}^3$ são subespaços afins, e no caso de o serem, determine a sua dimensão:

a) $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : b = c, a \geq 0\}$;
b) $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a + b = 2\}$;
c) $\{(\lambda, 2\lambda + 1, -3 + \sqrt{3}\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$;
d) $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a^2 = -2\}$;
e) $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$;
f) $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a + b \geq 2\}$.

EXERCÍCIO 1.4.8. Indique a dimensão e codimensão do subespaço afim de $\mathbb{R}^5$ definido pelas equações

$$x + y + z + w = 3, \quad -x - y - t = 0 \quad \text{e} \quad 2z + 2w - 2t = 6.$$

EXERCÍCIO 1.4.9. Considere o subespaço afim $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^5$ que passa pelo ponto $P = (0,2,0,1,0)$ com subespaço de direcções W gerado pelos vectores

$$(1,2,0,0,0), \quad (0,2,0,1,0), \quad (1,0,0,-1,0), \quad \text{e} \quad (2,6,0,1,0).$$

a) Qual é a dimensão de $\mathcal{F}$?
b) Indique um sistema de equações que descreva os pontos de $\mathcal{F}$.
c) Indique uma recta paralela a $\mathcal{F}$ que passe pelo ponto $(1,2,3,4,5)$. Quantas rectas há nessas condicões?
d) Indique um hiperplano $\mathcal{H}$ paralelo a $\mathcal{F}$.

EXERCÍCIO 1.4.10. Seja $\mathcal{H}$ o plano de $\mathbb{R}^3$ definido pela equação

$$x + y + 2z = 31.$$

Determine o plano paralelo a $\mathcal{H}$ que passa no ponto $(\pi, 24, 0)$.

EXERCÍCIO 1.4.11. Considere em $\mathbb{R}^3$ a família de rectas r_t, $(t \in \mathbb{R})$ tais que

$$r_t := (t^2 + 1, t, 1) + \mathcal{L}\{(t^2, t, 1)\}$$

e a família de planos H_s, $(s \in \mathbb{R})$ definidos pelas equações cartesianas

$$x + sy = 3.$$

[2] A preimagem $f^{-1}(w)$ de w é o conjunto de todos os vectores de V cuja imagem por f é w.

a) Determine, para cada s, uma equação vectorial de H_s e para cada t um sistema de equações cartesianas que defina r_t.
b) Indique, se existirem, os pares (s,t) tais que r_t é paralela a H_s.
c) Diga, justificando, se existe algum plano em $\mathbb{R}^3$ que contenha as rectas r_0 e r_{-2}.
d) Diga, justificando, se existe algum plano em $\mathbb{R}^3$ que contenha todas as rectas r_t.

EXERCÍCIO 1.4.12. Diga, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras:

a) Duas rectas distintas de $\mathbb{R}^2$ ou são paralelas ou intersectam-se num ponto.
b) Duas rectas distintas de $\mathbb{R}^3$ ou são paralelas ou intersectam-se num ponto.
c) Em $\mathbb{R}^3$ duas rectas paralelas a um mesmo plano são paralelas entre si.
d) Dados dois planos em $\mathbb{R}^3$ existe sempre uma recta paralela a ambos os planos.
e) Dados dois planos em $\mathbb{R}^4$ existe sempre uma recta paralela a ambos os planos.
f) Dados dois 4-planos em $\mathbb{C}^6$ existe sempre uma recta paralela a ambos.
g) Em $\mathbb{R}^n$ em cada ponto passa uma única recta paralela a uma recta dada.
h) Em $\mathbb{R}^n$ em cada ponto passa uma única recta paralela a um plano dado.

EXERCÍCIO 1.4.13. Mostre que um subconjunto não vazio X de um espaço afim $\mathcal{A}$ é um subespaço afim de $\mathcal{A}$ se e só se $\langle P,Q\rangle \subset X$ para todos os pontos $P,Q \in X$. Note que esta proposição não é válida se o espaço das direcções de $\mathcal{A}$ for um espaço vectorial sobre um corpo de característica 2.

EXERCÍCIO 1.4.14. Em $\mathbb{R}^3$ considere o referencial $R = (O;B)$ onde

$$O = (1,2,3) \quad \text{e} \quad B = (v_1, v_2, v_3)\,,$$

com $v_1 = (0,1,1)$, $v_2 = (0,0,1)$ e $v_3 = (1,1,0)$. Complete as afirmações seguintes:

a) O vector u tal que $u_B = (1,2,7)$ é o vector ...
b) Se $u = (1,2,7)$ então $u_B = \ldots$
c) O ponto P tal que $P_R = (1,2,7)$ é o ponto $P = \ldots$
d) Se $P = (0,0,0)$ então $P_R = \ldots$
e) O ponto P tal que $P_R = (0,0,0)$ é o ponto $P = \ldots$

EXERCÍCIO 1.4.15. Considere em $\mathbb{R}^3$ o referencial R do Exercício 1.4.14 e $\mathcal{F}$ o plano definido em relação a R pela equação $x - z = 5$. Diga quais das seguintes afirmações são verdadeiras:

a) A origem do referencial R pertence a $\mathcal{F}$.
b) O vector $(1,0,1)$ pertence ao subespaço vectorial associado a $\mathcal{F}$.
c) O vector v tal que $v_B = (1,0,1)$ pertence ao espaço das direcções de $\mathcal{F}$.
d) O ponto $O + v_1 + v_3$ pertence a $\mathcal{F}$.
e) O ponto P tal que $P_R = (1,0,1)$ pertence a $\mathcal{F}$.
f) O ponto $Q = (6,0,1)$ pertence a $\mathcal{F}$.
g) O ponto P tal que $P_R = (6,7,1)$ pertence a $\mathcal{F}$.
h) O plano definido, em relação a R, por $x + y + z = 3$ é paralelo a $\mathcal{F}$.

EXERCÍCIO 1.4.16. Em $\mathbb{R}^3$ determine as equacões cartesianas, paramétricas e vectoriais

a) da recta que passa pelos pontos $P = (-5,6,1), Q = (3,3,0)$;
b) da recta definida pelo ponto $P = (-5,6,2)$ e pelo vector $v = (\pi, \sqrt{2}, -3)$;
c) do plano que contém os pontos $(1,0,0)$, $(0,2,1)$, $(3,3,3)$.

EXERCÍCIO 1.4.17. Em $\mathbb{R}^2$ considere a recta m que passa pelos pontos $(-1,4)$ e $(5,-14)$. Determine um referencial R em $\mathbb{R}^2$ para o qual m seja definida pela equação cartesiana $y = 0$. Esse referencial é único?

EXERCÍCIO 1.4.18. Diga quais das seguintes expressões fazem sentido e qual o seu significado, onde P, Q, R são pontos de um espaço afim real ou complexo:

a) $P + (2+i)\,\overrightarrow{PQ}$;	*b)* $-(1+i)P + (2+i)\,Q$;	*c)* $\frac{1}{2}P + \frac{1}{3}Q + \frac{1}{6}R$;
d) $\frac{1}{2}P + \frac{1}{3}Q + \frac{5}{6}R$;	*e)* $P + Q + R$;	*f)* $\frac{1}{3}P + \frac{1}{3}Q + \frac{1}{3}R$;
g) $2P - Q$;	*h)* $2P + Q$.	

EXERCÍCIO 1.4.19. Em $\mathbb{R}^3$ determine o subespaço afim $\mathcal{F}$ gerado pelos pontos $P_0 = (-1,-2,0)$, $P_1 = (0,1,1)$, $P_2 = (-1,0,1)$ e $P_3 = (1,0,0)$ e diga qual a sua dimensão.

EXERCÍCIO 1.4.20. Considere os pontos $P_0 = (0,1,2), P_1 = (1,0,0)$ de $\mathbb{R}^3$ e determine, se existirem, pontos P_2 e P_3 de $\mathbb{R}^3$ de forma a que os pontos P_0, P_1, P_2, P_3 sejam independentes.

EXERCÍCIO 1.4.21. Sejam P_0, P_1, P_2 três pontos dum espaço afim de dimensão dois que definem dois referenciais

$$R = \left(P_0; \left(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}\right)\right) \quad \text{e} \quad R' = \left(P_2; \left(\overrightarrow{P_2P_1}, \overrightarrow{P_2P_0}\right)\right).$$

Determine as coordenadas P_R e $P_{R'}$ do ponto $P = \frac{1}{2}P_0 + \frac{2}{3}P_1 - \frac{1}{6}P_2$ nos dois referenciais.

EXERCÍCIO 1.4.22. Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: "Dados uma recta e um plano de $\mathbb{R}^3$, existe sempre um referencial em relação ao qual a recta é definida pelas equações $x = y = 0$ e o plano pela equação $z = 0$".

EXERCÍCIO 1.4.23. Diga justificando se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) O subespaço afim gerado por duas rectas tem no máximo dimensão 3.
b) O subespaço afim gerado por duas rectas paralelas disjuntas tem dimensão 2.
c) O subespaço afim gerado por dois planos paralelos tem no máximo dimensão 3.
d) Dada uma recta r em $\mathbb{R}^2$, existe um referencial em relação ao qual r é definida pela equação cartesiana $x = 0$.
e) Dada uma recta r em $\mathbb{R}^n$, existe um referencial em relação ao qual r é definida pelas equações cartesianas $x_1 = 0, \ldots, x_{n-1} = 0$.

EXERCÍCIO 1.4.24. Mostre que se $P = a_0P_0 + \cdots + a_mP_m$ é um ponto de um espaço afim com $a_0 + \cdots + a_{m-1} \neq 0$ e $\sum_{i=0}^{m} a_i = 1$, então

$$P = \alpha R + a_m P_m,$$

onde $\alpha = \sum_{i=0}^{m-1} a_i$ e

$$R = \frac{a_0}{\alpha} P_0 + \cdots + \frac{a_{m-1}}{\alpha} P_{m-1}.$$

EXERCÍCIO 1.4.25. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim real. Mostre que as diagonais de um paralelogramo de $\mathcal{A}$ se intersectam no seu ponto médio, isto é, se P, P', Q', Q são os vértices de um paralelogramo $(PP'Q)$ e o ponto C satisfaz $\overrightarrow{PQ'} = 2\overrightarrow{PC}$, então C também satisfaz $\overrightarrow{P'Q} = 2\overrightarrow{P'C}$.

EXERCÍCIO 1.4.26. Dado um espaço afim $\mathcal{A}$ chama-se um **sistema de massas pontuais** a um conjunto finito de pares

$$\{(P_1, \beta_1), \ldots, (P_m, \beta_m)\},$$

onde $P_i \in \mathcal{A}$ e os β_i são escalares para $i = 1, \ldots, m$, chamados **massas**. Mostre que:

a) Se $\beta := \sum_{i=1}^{m} \beta_i \neq 0$ então existe um único ponto $C \in \mathcal{A}$ (designado por **baricentro** ou **centro de massa**) que satisfaz

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i \, \overrightarrow{CP_i} = 0.$$

Sugestão: utilize combinações afins.

b) Se P é um ponto qualquer de $\mathcal{A}$ então

$$\overrightarrow{PC} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\beta_i}{\beta} \overrightarrow{PP_i}.$$

c) O baricentro do sistema de massas $\{(P_1, \lambda\beta_1), \ldots, (P_m, \lambda\beta_m)\}$ com $\lambda \neq 0$ coincide com o baricentro de $\{(P_1, \beta_1), \ldots, (P_m, \beta_m)\}$.

d) Quando todas as massas são iguais então o baricentro coincide com o centro geométrico dos pontos $P_1, \ldots, P_m$.

EXERCÍCIO 1.4.27. Dados $m+1$ pontos independentes $P_0, \ldots, P_m$ dum espaço afim $\mathcal{A}$ de dimensão m, mostre que para todo o ponto $Q \in \mathcal{A}$ existem massas $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ para as quais Q é o baricentro do sistema $\{(P_0, \beta_0), \cdots, (P_m, \beta_m)\}$. Diga, justificando, se estas massas são únicas.

EXERCÍCIO 1.4.28. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim real. Mostre que se $P, Q, R \in \mathcal{A}$ são três pontos não colineares então $\frac{1}{3}P + \frac{1}{3}Q + \frac{1}{3}R$ é o ponto de intersecção das três medianas do triangulo de vértices P, Q e R.

EXERCÍCIO 1.4.29. Determine o centro geométrico dos pontos $P = (0, 1, 0)$, $Q = (1000, 2, -1)$ e $R = (1, 2, 0)$ de $\mathbb{R}^3$.

EXERCÍCIO 1.4.30. Mostre que se o centro geométrico de três pontos distintos de $\mathbb{R}^n$ é um desses pontos então os três pontos são colineares.

EXERCÍCIO 1.4.31. Considere o centro geométrico C de $n+1$ pontos independentes $P_1, \ldots, P_{n+1}$ de um espaço afim real $\mathcal{A}$. Mostre que C pertence ao segmento de recta $[P_{n+1}\, C_1]$, onde C_1 é o centro geométrico dos pontos $P_1, \ldots, P_n$.

EXERCÍCIO 1.4.32. Seja Δ um triângulo de $\mathbb{R}^2$. Para cada vértice P de Δ considere duas rectas que passam em P e dividem o lado oposto a P em três partes iguais. Seja H o hexágono limitado por estas seis rectas. Mostre que as diagonais de H que unem vértices opostos se intersectam todas num ponto.

EXERCÍCIO 1.4.33. Represente graficamente os conjuntos

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1,\ y \geq 0,\ x \geq y\right\};$$

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = a_0(1, 0) + a_1(0, 1) + a_2(2, 3),\right.$$
$$\left. a_0, a_1, a_2 \geq 0,\ a_0 + a_1 + a_2 = 1\right\}.$$

Quais dos conjuntos A, B, $A \cup B$ são convexos?

EXERCÍCIO 1.4.34. Seja r uma recta em $\mathbb{R}^2$ definida pela equação

$$ax + by + c = 0.$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Mostre que o semiplano fechado

$$r_0^+ := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, a\,x + b\,y + c \geq 0\right\}$$

é um conjunto convexo.

EXERCÍCIO 1.4.35. Dados três pontos $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$ determine a aplicação afim $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma os pontos $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$ nos pontos P, Q e R. Qual a aplicação afim $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma os pontos $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$ nos pontos $(2, 3)$, $(1, 6)$ e $(3, -1)$?

EXERCÍCIO 1.4.36. Seja $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação afim que transforma os pontos $(1, 2)$, $(3, 1)$ e $(1, 1)$ nos pontos $(0, 1)$, $(1, 1)$ e $(2, 1)$ respectivamente. Se considerarmos os referenciais de $\mathbb{R}^2$

$$R = \big((1, 1); ((1, 0), (0, 2))\,\big) \quad \text{e} \quad R' = \big((0, 0); ((1, 0), (0, 1))\,\big),$$

determine a representação matricial de ψ que se obtém se fixarmos o referencial R no espaço de partida e R' no de chegada.

EXERCÍCIO 1.4.37. Seja $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\psi(x, y) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3/2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Calcule a imagem por ψ das rectas

a) $y = 2x$; b) $3x - y + 1 = 0$.

EXERCÍCIO 1.4.38. Mostre que a aplicação afim $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\psi(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

é bijectiva e determine a sua inversa. Quais são as aplicações lineares associadas a ψ e a ψ^{-1}?

EXERCÍCIO 1.4.39. Mostre que dados quaisquer dois paralelogramos de $\mathbb{R}^2$ existe um isomorfismo afim que transforma um no outro.

EXERCÍCIO 1.4.40. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim real e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ uma aplicação afim. Se P e Q são dois pontos distintos de $\mathcal{A}$ e X é uma combinação afim $X = aP + b\,Q$ (com $a + b = 1$), mostre que $\varphi(X)$ é a combinação afim $\varphi(X) = a\varphi(P) + b\,\varphi(Q)$.

EXERCÍCIO 1.4.41. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim real e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ um isomorfismo afim. Se P e Q são dois pontos distintos de $\mathcal{A}$ e M é o ponto médio do segmento de recta $[PQ]$, mostre que $\varphi(M)$ é o ponto médio do segmento de recta $[\varphi(P)\varphi(Q)]$.

EXERCÍCIO 1.4.42. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim real e $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ uma aplicação afim. Dada uma recta $l \subset \mathcal{A}$ mostre que os pontos médios dos segmentos de recta $[P\psi(P)]$ com $P \in l$ ou são todos distintos e colineares ou todos coincidentes.

EXERCÍCIO 1.4.43. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim real e $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ um isomorfismo afim. Mostre que, dados quaisquer dois pontos $P, Q \in \mathcal{A}$ do mesmo lado de um hiperplano $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$, os pontos $\phi(P)$ e $\phi(Q)$ estão do mesmo lado do hiperplano $\phi(\mathcal{H})$.

EXERCÍCIO 1.4.44. Mostre que duas dilatações

$$\delta_{P_0,\lambda} : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \quad \text{e} \quad \delta_{P_0,\mu} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

com o mesmo centro comutam e que a composta é ainda uma dilatação com o mesmo centro. Qual a razão dessa dilatação?

EXERCÍCIO 1.4.45. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim real e considere duas dilatações $\delta_{P,k_1}, \delta_{Q,k_2} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ com $k_1 k_2 \neq 1$. Mostre que

$$\delta_{Q,k_2} \circ \delta_{P,k_1} = \delta_{R,k_1 k_2},$$

onde $R = Q + v$ com

$$v = \frac{k_2(1-k_1)}{1-k_1k_2}\ \overrightarrow{QP}.$$

(Em particular os pontos P,Q e R são colineares.) O que acontece quando $k_1 k_2 = 1$?

EXERCÍCIO 1.4.46. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim associado a um espaço vectorial de dimensão finita V e $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ uma aplicação afim.

a) Mostre que:
   i) se ψ tem um ponto fixo X e $v \in V$ é tal que $\overrightarrow{\psi}(v) = v$, então $X + v$ é também um ponto fixo de ψ;
   ii) se ψ tem dois pontos fixos distintos X_1, X_2, então o vector $\overrightarrow{X_1X_2}$ é fixo por $\overrightarrow{\psi}$.
   iii) se P é um ponto de $\mathcal{A}$ qualquer e $Q = \psi(P)$, então $X \in \mathcal{A}$ é um ponto fixo de ψ se e só se

$$\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{PX}) - \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{QP}.$$

b) Conclua que ψ tem um e um só ponto fixo se e só se $\overrightarrow{\psi}$ fixa apenas o vector 0_V.

EXERCÍCIO 1.4.47. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim associado a um espaço vectorial V e sejam U e W dois subespaços vectoriais de V directamente complementares, i.e. tais que $V = U \oplus W$. Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ subespaços afins de $\mathcal{A}$ associados a U e W respectivamente.

a) Mostre que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing$ e determine a sua dimensão.

b) Considere as projecções $p_1 : U \oplus W \to U$ e $p_2 : U \oplus W \to W$ definidas por

$$p_1(u, w) = u \quad \text{e} \quad p_2(u, w) = w$$

e as aplicações $\pi_1 : \mathcal{A} \to \mathcal{F}$ e $\pi_2 : \mathcal{A} \to \mathcal{G}$ definidas por

$$\pi_i(P) = P_0 + p_i(\overrightarrow{P_0P}), \;\; i = 1, 2,$$

onde P_0 é o ponto da intersecção $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

(i) Determine $\pi_i(P_0)$, $i = 1, 2$.

(ii) Mostre que as aplicações π_i são afins. Quais as aplicações lineares associadas?

A aplicação π_1 chama-se a **projecção** em $\mathcal{F}$ ao longo de $\mathcal{G}$, e π_2 a projecção em $\mathcal{G}$ ao longo de $\mathcal{F}$.

EXERCÍCIO 1.4.48. (**Teorema de Thales**) Seja $\mathcal{A}$ um plano afim. Sejam r_1, r_2, r_3 três rectas paralelas distintas e l, m duas rectas não paralelas a r_1, r_2, r_3. Sendo P_i e Q_i, para $i = 1, 2, 3$, os pontos de intersecção $P_i = l \cap r_i$ e $Q_i = m \cap r_i$, mostre que os escalares α e β, tais que

$$\overrightarrow{P_1P_3} = \alpha \overrightarrow{P_1P_2} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{Q_1Q_3} = \beta \overrightarrow{Q_1Q_2},$$

são iguais (ver Figura 1.13.) Reciprocamente, se um ponto P satisfaz $\overrightarrow{P_1P} = \alpha\overrightarrow{P_1P_2}$, onde α é tal que $\overrightarrow{Q_1Q_3} = \alpha \overrightarrow{Q_1Q_2}$, mostre que $P \in r_3$ (e então $P = P_3$).

Sugestão: Considere a projecção em m ao longo de r_1 e comece por mostrar que esta aplicação transforma os pontos P_i nos pontos Q_i, com $i = 1, 2, 3$.

EXERCÍCIO 1.4.49. (**Teorema de Pappus**) Seja $\mathcal{A}$ um plano afim e r, r' duas rectas distintas de $\mathcal{A}$. Sejam P, Q, R três pontos de r e P', Q', R' três pontos de r'. Mostre que se a recta PQ' é paralela a QP' e QR' é paralela a RQ' então PR' é paralela a RP'.

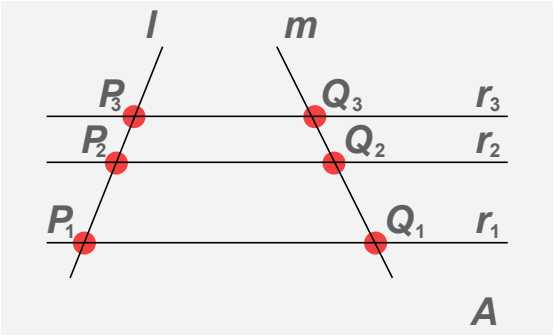

FIGURA 1.13. Teorema de Thales

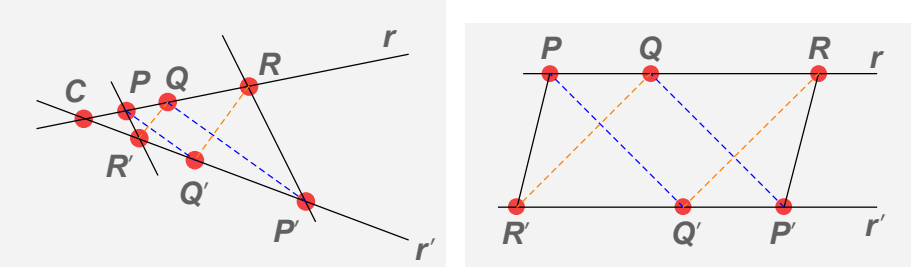

FIGURA 1.14. Teorema de Pappus

Sugestão: Suponha primeiro que as duas rectas r e r' se intersectam num ponto C e considere as dilatações $\delta_{C,k_1}, \delta_{C,k_2} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ de centro C que transformam P em Q e Q em R respectivamente. Use o Teorema de Thales para mostrar que δ_{C,k_1} transforma Q' em P' e δ_{C,k_2} transforma R' em Q'. Use o Exercício 1.4.44 para mostrar que $\delta_{C,k_1} \circ \delta_{C,k_2}$ transforma P em R e R' em P'. Conclua, pelo Teorema de Thales, que PR' é paralela a RP'.

Se as duas rectas r e r' são paralelas considere translações em vez de dilatações.

EXERCÍCIO 1.4.50. (**Teorema de Desargues**) Considere dois triângulos de vértices P, Q, R e P', Q', R' num plano afim $\mathcal{A}$ sem vértices em comum e com lados correspondentes paralelos (ver Figura 3.6). Mostre que as três rectas PP', QQ' e RR' ou são concorrentes ou paralelas.

Sugestão: Suponha primeiro que as rectas PP' e QQ' se intersectam num ponto C e mostre que este ponto pertence à recta RR'. Para isso

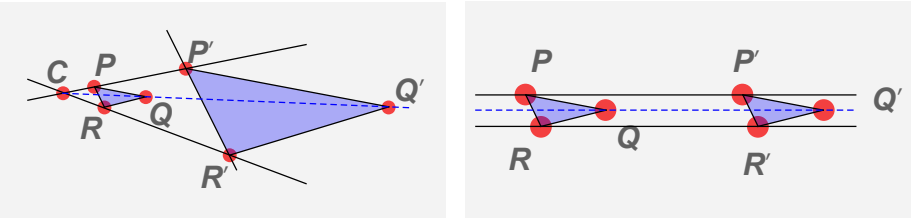

FIGURA 1.15. Teorema de Desargues

considere a dilatação $\delta_{C,k} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ de centro C que transforma P em P' e use o Teorema de Thales para mostrar que esta dilatação transforma Q em Q'. Então, fazendo $R'' := \delta_{C,k}(R)$, basta mostrar (novamente pelo Teorema de Thales) que $R' = R''$, pois isso implica que os três pontos C, R e R' são colineares.

Se as duas rectas PP' e QQ' são paralelas considere a translação que leva P em P' em vez da dilatação.

CAPÍTULO 2

Geometria Euclidiana

Neste capítulo introduzimos a noção de distância em espaços afins **reais** e estudamos as transformações que a preservam.

2.1. Espaços afins euclidianos

DEFINIÇÃO 2.1.1. *Um espaço afim $\mathcal{A}$ associado a um espaço vectorial real V de dimensão finita diz-se um* **espaço afim euclidiano** *se em V estiver fixado um produto interno.*

No que se segue $\mathcal{E}$ é usado para denotar um espaço afim euclidiano associado a um espaço vectorial V real de dimensão finita n.

DEFINIÇÃO 2.1.2. *Um referencial $R = (O; B)$ de $\mathcal{E}$ diz-se um* **referencial ortogonal** *se B é uma base ortogonal de V. O referencial diz-se um* **referencial ortonormado** *se B é uma base ortonormada de V.*

DEFINIÇÃO 2.1.3. *Dado um hiperplano $\mathcal{H} = P + W$ de $\mathcal{E}$, um vector não nulo $v \in V$ diz-se um* **vector normal** *a $\mathcal{H}$ se $v \in W^{\perp}$. Se v é um vector normal a $\mathcal{H}$ e v tem norma 1, diz-se um* **vector unitário normal** *a $\mathcal{H}$.*

PROPOSIÇÃO 2.1.4. *Seja $\mathcal{H}$ um hiperplano de $\mathcal{E}$ definido em relação a um referencial ortonormado $R = (O; B)$ de $\mathcal{E}$ pela equação*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b. \tag{2.1.1}$$

Então, um vector $v \in V$ não nulo é um vector normal a $\mathcal{H}$ se e só se o vector de coordenadas v_B de v em relação à base B satisfaz

$$v_B = \lambda(a_1, ..., a_n),$$

para algum número real $\lambda \neq 0$.

Demonstração: Seja W o espaço das direcções de $\mathcal{H}$ e $v \in V$ um vector com coordenadas na base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ dadas por $v_B = (a_1, \ldots, a_n)$. Seja w um vector qualquer de W e $w_B = (x_1, \ldots, x_n)$ as suas coordenadas na

base B. Note que, como $w \in W$, as suas coordenadas satisfazem a equação homogénea associada a (2.1.1), isto é

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0. \tag{2.1.2}$$

Então temos

$$\begin{aligned}\langle v, w\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \left\langle e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i\, x_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,\end{aligned}$$

pois B é uma base ortonormada. Conclui-se assim que $v \in W^\perp$ se e só se

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0.$$

Como $\dim W^\perp = 1$, o resultado segue. □

Definição 2.1.5. *Dado um subespaço afim $\mathcal{F} = Q + U$ de $\mathcal{E}$, uma recta $r = P + \mathcal{L}\{w\}$ diz-se* **perpendicular** *a $\mathcal{F}$ se $w \in U^\perp$.*

Nota 2.1.6. Duas rectas $r = P + \mathcal{L}\{u\}$ e $s = Q + \mathcal{L}\{v\}$ são perpendiculares se e só se os vectores u e v são ortogonais.

Definição 2.1.7. *Uma recta perpendicular a um hiperplano $\mathcal{H}$ diz-se um* **eixo***eixo! de um hiperplano de $\mathcal{H}$.*

Nota 2.1.8. Uma recta $r = P + \mathcal{L}\{w\}$ é um eixo de $\mathcal{H}$ se e só se w é um vector normal a $\mathcal{H}$.

Definição 2.1.9. *Dois hiperplanos $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ dizem-se* **perpendiculares** *se tiverem eixos perpendiculares.*

Proposição 2.1.10. *Seja $\mathcal{H}$ um hiperplano de $\mathcal{E}$. Por um ponto $P \in \mathcal{E}$ passa um e um só eixo de $\mathcal{H}$.*

Demonstração: Seja W o espaço das direcções de $\mathcal{H}$. Como $\mathcal{H}$ é um hiperplano temos que $\dim W^\perp = 1$ e então qualquer eixo de $\mathcal{H}$ tem espaço de direções $W^\perp$. Assim, a recta $r = P + W^\perp$ é o único eixo de $\mathcal{H}$ que passa em P. □

Nota 2.1.11. A Proposição 2.1.10 não é verdadeira se substituirmos hiperplano por um subespaço afim arbitrário. Por exemplo, em $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual, considere-se o plano

$$\mathcal{F} := (0,3,0,0) + \mathcal{L}\{(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}.$$

As rectas $r := (3,2,1,0) + \mathcal{L}\{(0,0,0,1)\}$ e $s := (3,2,1,0) + \mathcal{L}\{(0,0,1,1)\}$ passam ambas pelo ponto $(3,2,1,0)$ e são ambas perpendiculares a $\mathcal{F}$.

2.2. Distâncias e ângulos

Num espaço afim euclidiano é possível definir a noção de distância e de (medida de) ângulo.

Dados dois pontos $P, Q \in \mathcal{E}$, a **distância** $d(P,Q)$ entre P e Q é dada por

$$d(P,Q) := \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

A função $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ assim definida tem as seguintes propriedades.

PROPOSIÇÃO 2.2.1. *Sejam $P, Q, R \in \mathcal{E}$ pontos quaisquer de $\mathcal{E}$ e $u \in V$ um vector qualquer. Então,*

1) $d(P,Q) = d(Q,P)$*;*
2) $d(P,Q) \geq 0$ *e* $d(P,Q) = 0$ *se e só se* $P = Q$*;*
3) $d(P,Q) = d(P+u, Q+u)$*;*
4) $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$ *(***desigualdade triangular***).*

Demonstração: As propriedades **1**) e **2**) são consequência imediata das definições e propriedades de espaço afim e de norma de um vector. A propriedade **3**) é consequência da Regra do Paralelogramo pois

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{(P+u)(Q+u)}.$$

Finalmente, para provar **4**) temos $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}$, pelo que

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{PQ}\|^2 &= \|\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}\|^2 = \langle \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ} \rangle \\
&= \langle \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PR} \rangle + \langle \overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RQ} \rangle + 2\langle \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{RQ} \rangle \\
&= \|\overrightarrow{PR}\|^2 + \|\overrightarrow{RQ}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{RQ} \rangle \\
&\leq \|\overrightarrow{PR}\|^2 + \|\overrightarrow{RQ}\|^2 + 2|\langle \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{RQ} \rangle| \\
&\leq \|\overrightarrow{PR}\|^2 + \|\overrightarrow{RQ}\|^2 + 2\|\overrightarrow{PR}\|\|\overrightarrow{RQ}\| = \left(\|\overrightarrow{PR}\| + \|\overrightarrow{RQ}\|\right)^2,
\end{aligned}$$

onde usámos a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|\|v\|, \quad \forall u, v \in V. \tag{2.2.1}$$

□

NOTA 2.2.2. A igualdade em 4) ocorre exactamente quando $\langle \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{RQ} \rangle \geq 0$ e temos igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz (2.2.1), isto é quando os vectores $\overrightarrow{PR}$ e $\overrightarrow{RQ}$ têm a mesma direcção e sentido.

DEFINIÇÃO 2.2.3. *O* **comprimento** *de um segmento de recta* $[PQ]$ *é a distância* $d(P,Q)$ *entre* P *e* Q*.*

Usando a noção de distância é possível caracterizar os pontos de um segmento de recta.

PROPOSIÇÃO 2.2.4. *Sejam* P *e* Q *dois pontos distintos de* $\mathcal{E}$*. Um ponto* S *de* $\mathcal{E}$ *pertence a* $[PQ]$ *se e só se*

$$d(P,S) + d(S,Q) = d(P,Q).$$

Demonstração: Seja $S \in [PQ]$. Então S pode ser escrito como combinação convexa $S = aP + b\,Q$, onde $a, b \geq 0$ e $a + b = 1$. Assim, $S = P + b\,\overrightarrow{PQ} = Q + a\,\overrightarrow{QP}$, pelo que

$$d(P,S) = b\,\|\overrightarrow{PQ}\| \quad \text{e} \quad d(S,Q) = a\,\|\overrightarrow{QP}\| = a\|\overrightarrow{PQ}\|,$$

e então

$$d(P,S) + d(S,Q) = (a+b)\|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = d(P,Q).$$

Reciprocamente, se P, Q e S são tais que

$$d(P,S) + d(S,Q) = d(P,Q),$$

então, pela Nota 2.2.2, temos que os vectores $\overrightarrow{PS}$ e $\overrightarrow{SQ}$ têm a mesma direcção e sentido. Assim, existe $\mu \geq 0$ tal que

$$\overrightarrow{PS} = \mu\overrightarrow{SQ},$$

pelo que

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SQ} = (1+\mu)\overrightarrow{SQ},$$

e então

$$\overrightarrow{QS} = \frac{1}{1+\mu}\overrightarrow{QP} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{PS} = \frac{\mu}{1+\mu}\overrightarrow{PQ}.$$

Conclui-se que

$$S = aP + b\,Q$$

com

$$a = \frac{1}{1+\mu} \quad \text{e} \quad b = \frac{\mu}{1+\mu}.$$

(note que $a + b = 1$) e então, como $a, b \geq 0$, temos que $S \in [PQ]$. □

O produto interno em V permite-nos também definir noções de medida de ângulo.

DEFINIÇÃO 2.2.5. *Dadas duas rectas l e m de $\mathcal{E}$, define-se o* **ângulo** $\measuredangle(l,m)$ *entre l e m, como sendo o menor dos ângulos $\measuredangle(u,v)$, onde u é um vector director de l e v é um vector director de m.*

Assim

$$\measuredangle(l,m) = \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{com} \quad \cos\alpha = \frac{|\langle u, v\rangle|}{||u||\,||v||}.$$

DEFINIÇÃO 2.2.6. *Dada uma recta l e um hiperplano $\mathcal{H}$, define-se o* **ângulo** $\measuredangle(l,\mathcal{H})$ *entre l e $\mathcal{H}$, como sendo*

$$\measuredangle(l,\mathcal{H}) := \frac{\pi}{2} - \measuredangle(l,m),$$

onde m é um eixo de $\mathcal{H}$.

DEFINIÇÃO 2.2.7. *Dados dois hiperplanos $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, define-se o* **ângulo** $\measuredangle(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ *entre $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, como sendo*

$$\measuredangle(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2) := \measuredangle(l,m),$$

onde l é um eixo de $\mathcal{H}_1$ e m é um eixo de $\mathcal{H}_2$.

2.3. Distâncias entre subespaços afins

Para definir o conceito de distância entre dois subespaços afins de um espaço afim euclidiano $\mathcal{E}$ precisamos do seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 2.3.1. *Sejam $\mathcal{F} = P + U$ e $\mathcal{G} = Q + W$ dois subespaços afins de $\mathcal{E}$ associados a subespaços vectoriais U e W respectivamente e tais que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$. Então,*

i) existe uma recta $r = X + \mathcal{L}\{v\}$ com $v \in U^\perp \cap W^\perp$ que intersecta $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$;

ii) para qualquer recta r que satisfaz i), se S e T são os pontos

$$S = r \cap \mathcal{F} \quad e \quad T = r \cap \mathcal{G},$$

então $d(S,T) \leq d(M,N)$, para todos os pontos $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{G}$.

Demonstração: ***i)*** Como, por hipótese, $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$, o vector $\overrightarrow{PQ} \notin U + W$ (ver o Teorema 1.1.15 sobre intersecções de subespaços afins).

Consideremos então o subespaço vectorial V_0 de V gerado por $\overrightarrow{PQ}$ e $U + W$, i.e.

$$V_0 := \mathcal{L}\{\overrightarrow{PQ}\} + U + W.$$

O complemento ortogonal V_1 de $U + W$ em V_0, i.e. o subespaço

$$V_1 := V_0 \cap U^\perp \cap W^\perp,$$

tem dimensão 1 e, como $\overrightarrow{PQ} \in V_0$, podemos escrever $\overrightarrow{PQ} = u + w + v$, com $u \in U$, $w \in W$ e $v \in V_1$. Como $\overrightarrow{PQ} \notin U + V$, temos que $v \neq 0$, pelo que v é um gerador de V_1.

Seja r a recta $r := (P + u) + V_1$. Pela construção de V_1, a recta r é perpendicular a $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$. Como $u \in U$ e $w \in W$, temos que

$$P + u \in r \cap \mathcal{F} \quad \text{e} \quad Q - w = P + u + v \in r \cap \mathcal{G}.$$

Note que, como r não é paralela a $\mathcal{F}$ nem a $\mathcal{G}$, intersecta $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ apenas em $P + u$ e $Q - u$ respectivamente. Conclui-se assim que a recta r satisfaz i).

ii) Suponhamos agora que r é uma recta, cuja direcção é ortogonal a U e V, e que intersecta $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ nos pontos S e T respectivamente. Dados pontos $M \in \mathcal{F}$ e $N \in \mathcal{G}$ quaisquer, temos

$$\begin{aligned} d(M,N)^2 &= \|\overrightarrow{MN}\|^2 = \|\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TN}\|^2 \\ &= \langle \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TN}, \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TN} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{TN}, \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{TN} \rangle + 2\langle \overrightarrow{MS}, \overrightarrow{ST} \rangle + 2\langle \overrightarrow{TN}, \overrightarrow{ST} \rangle + \|\overrightarrow{ST}\|^2. \end{aligned}$$

Como $\overrightarrow{TN} \in W$, $\overrightarrow{MS} \in U$ e $\overrightarrow{ST} \in U^\perp \cap W^\perp$, esta última expressão reduz-se a

$$\|\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{TN}\|^2 + \|\overrightarrow{ST}\|^2,$$

pelo que

$$d(M,N)^2 = d(S,T)^2 + \|\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{TN}\|^2,$$

e então $d(S,T) \leq d(M,N)$. □

Como consequência desta proposição temos que, dados dois subespaços afins $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ de um espaço afim euclidiano $\mathcal{E}$, o conjunto de números reais

$$D = \{d(P,Q) : P \in \mathcal{F}, Q \in \mathcal{G}\}$$

tem sempre um mínimo.

Definição 2.3.2. *Dados dois subespaços afins $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ de $\mathcal{E}$ define-se a* **distância** $d(\mathcal{F},\mathcal{G})$ *entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, como sendo o mínimo do conjunto*

$$d(\mathcal{F},\mathcal{G}) := min\,\{d(P,Q) : P \in \mathcal{F}, Q \in \mathcal{G}\}.$$

Nota 2.3.3. Claramente $d(\mathcal{F},\mathcal{G}) = 0$ se e só se $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$.

Exemplo 2.3.4.

1) Pela Proposição 2.3.1 e pela Definição 2.3.2 temos que em $\mathbb{R}^2$ a distância de um ponto P a uma recta r é a distância de P ao ponto Q em que a recta perpendicular a r que passa por P intersecta r (ver Figura 2.1).

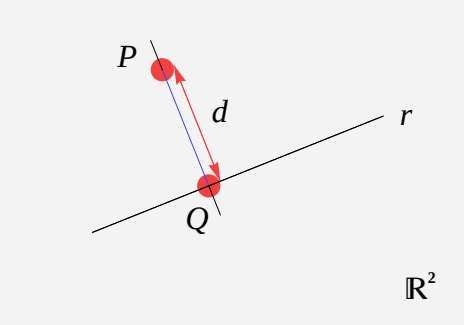

FIGURA 2.1. Distância de um ponto P a uma recta r de $\mathbb{R}^2$.

2) Da mesma forma, temos que em $\mathbb{R}^2$ a distância entre duas rectas paralelas se calcula determinando a distância de um ponto de uma das rectas à outra recta (ver Figura 2.2).

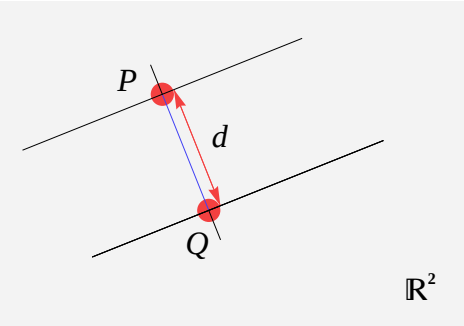

FIGURA 2.2. Distância entre duas rectas paralelas de $\mathbb{R}^2$.

3) A distância de um ponto $P \in \mathcal{E}$ a um hiperplano $\mathcal{H}$ é a distância de P ao ponto Q em que o único eixo de $\mathcal{H}$ que passa por P intersecta $\mathcal{H}$ (ver Figura 2.3).
4) A Proposição 2.3.1 diz-nos que por um ponto $P \in \mathcal{E}$, não pertencente a uma recta r, passa uma recta s que intersecta r e é perpendicular a r. Assim temos $d(P, r) = d(P, Q)$, onde $Q = r \cap s$.

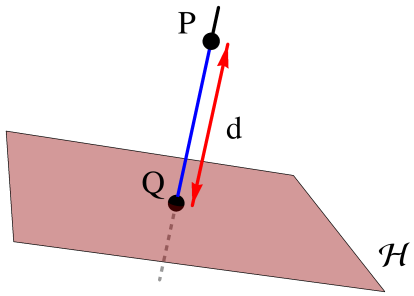

FIGURA 2.3. Distância entre um ponto P e um hiperplano $\mathcal{H}$ de $\mathbb{R}^3$.

Note que existe uma única recta s perpendicular a r que passa em P e intersecta r. Com efeito, esta recta s está necessariamente contida no hiperplano $\mathcal{H}$ que passa em P e é perpendicular a r, e s tem de passar no ponto P e no ponto de intersecção $Q = \mathcal{H} \cap r$ (ver Figura 2.4).

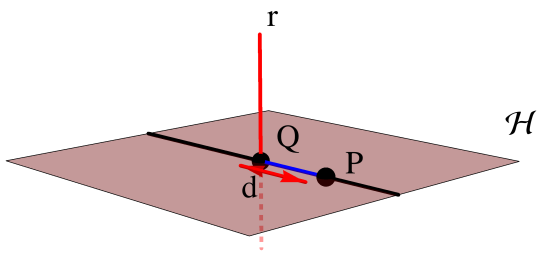

FIGURA 2.4. Distância entre um ponto P e uma recta r de $\mathbb{R}^3$.

5) Dadas duas rectas r, s de $\mathcal{E}$, se r e s forem *concorrentes* temos $d(r, s) = 0$. Se forem *paralelas* a distância de r a s é dada por $d(r, s) = d(P, Q)$, onde P e Q são os pontos em que um hiperplano $\mathcal{H}$ perpendicular a r e a s intersecta r e s respectivamente. Se as rectas forem *enviesadas* a distância de r a s calcula-se aplicando a Proposição 2.3.1 e a sua demonstração, ou seja determinando uma recta l que seja perpendicular a r e s e que intersecte r e s nos pontos P e Q respectivamente. Teremos então $d(r, s) = d(P, Q)$.
6) Dada uma recta r e um hiperplano $\mathcal{H}$ de $\mathcal{E}$, temos $r \cap \mathcal{H} = \emptyset$ se e só se r for paralela a $\mathcal{H}$ e r não estiver contida em $\mathcal{H}$. Neste caso, para determinar a distância de r a $\mathcal{H}$, basta determinar um eixo m

de $\mathcal{H}$ que passe por um ponto P de r e teremos $d(r,\mathcal{H}) = d(P,Q)$, onde $Q = m \cap \mathcal{H}$ (ver Figura 2.5).

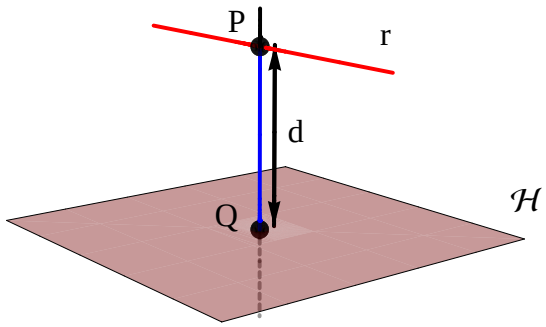

FIGURA 2.5. Distância entre uma recta r e um hiperplano $\mathcal{H}$ de $\mathbb{R}^3$ que não se intersectam.

2.4. Distâncias e reflexões

PROPOSIÇÃO 2.4.1. *Sejam P e Q dois pontos distintos dum espaço afim euclidiano $\mathcal{E}$ de dimensão n. O conjunto*

$$\mathcal{H} := \{X \in \mathcal{E} : \ d(X,P) = d(X,Q)\}$$

dos pontos equidistantes de P e Q é um hiperplano de $\mathcal{E}$ que passa pelo ponto médio de $[PQ]$ e é perpendicular à recta r definida por P e Q.

Demonstração: Pela definição de $\mathcal{H}$, o ponto médio de $[PQ]$ está em $\mathcal{H}$.

Fixemos um referencial ortonormado $R = (O;B)$ em $\mathcal{E}$ e suponhamos que $P_R = (p_1,\ldots,p_n)$ e $Q_R = (q_1,\ldots,q_n)$. Então

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &:= \{X \in \mathcal{E} : \ d(X,P) = d(X,Q)\} = \{X \in \mathcal{E} : \ \|\overrightarrow{PX}\| = \|\overrightarrow{QX}\|\}\\ &= \{X \in \mathcal{E} : \ X_R = (x_1,\ldots,x_n) \quad \text{com} \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i-p_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-q_i)^2\}\\ &= \{X \in \mathcal{E} : \ X_R = (x_1,\ldots,x_n) \quad \text{com}\\ &\qquad 2(q_1-p_1)x_1 + \cdots + 2(q_n-p_n)x_n + p_1^2 - q_1^2 + \cdots + p_n^2 - q_n^2 = 0\}.\end{aligned}$$

Com efeito, note que $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OX}$, pelo que

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{PX})_B &= (\overrightarrow{PO})_B + (\overrightarrow{OX})_B = -(\overrightarrow{OP})_B + (\overrightarrow{OX})_B = -P_R + X_R\\ &= (x_1-p_1,\ldots,x_n-p_n)\end{aligned}$$

e então

$$\|\overrightarrow{PX}\|^2 = \langle \overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PX} \rangle^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} (x_i - p_i)e_i, \sum_{j=1}^{n} (x_j - p_j)e_j \right\rangle$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - p_i)(x_j - p_j)\langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i - p_i)^2.$$

Analogamente, $\|\overrightarrow{QX}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - q_i)^2$.

Como $P \neq Q$, temos

$$(q_1 - p_1, \ldots, q_n - p_n) \neq (0, \ldots, 0),$$

pelo que um ponto X de coordenadas $X_R = (x_1, \ldots, x_n)$ pertence a $\mathcal{H}$ se e só se $(x_1, \ldots, x_n)$ é solução da equação linear

$$2(q_1 - p_1)x_1 + \cdots + 2(q_n - p_n)x_n + p_1^2 - q_1^2 + \cdots + p_n^2 - q_n^2 = 0.$$

Conclui-se assim que $\mathcal{H}$ é um subespaço afim de dimensão $n - 1$.

Como o subespaço vectorial U associado a $\mathcal{H}$ é definido em relação à base ortonormada B pela equação homogénea

$$2(q_1 - p_1)x_1 + \cdots + 2(q_n - p_n)x_n = 0,$$

e a recta definida por P e Q tem como espaço de direcções o subespaço vectorial W gerado pelo vector v cujas coordenadas em relação à base B são

$$v_B = (q_1 - p_1, \ldots, q_n - p_n),$$

temos que $W^{\perp} = U$, ou seja que r e $\mathcal{H}$ são perpendiculares. □

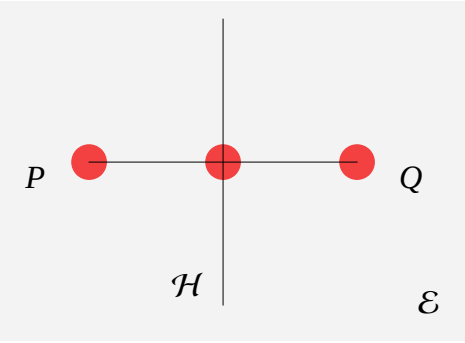

FIGURA 2.6. Conjunto $\mathcal{H}$ dos pontos equidistantes de P e Q.

DEFINIÇÃO 2.4.2. *Sejam P e Q dois pontos distintos de um espaço afim euclidiano $\mathcal{E}$ de dimensão n. Ao hiperplano*

$$\mathcal{H} := \{X \in \mathbb{R}^n : \ d(X,P) = d(X,Q)\}$$

dá-se o nome de **hiperplano mediador** *(ou* **bissector***) do segmento de recta $[PQ]$ (ou de P e Q). Quando $n = 2$ diz-se que $\mathcal{H}$ é a* **recta mediatriz** *de $[PQ]$ (ou de P e Q).*

COROLÁRIO 2.4.3. *Sejam $P_0, \ldots, P_n$ pontos independentes de um espaço afim euclidiano $\mathcal{E}$ de dimensão n. Se $P, Q \in \mathcal{E}$ são tais que*

$$d(P,P_i) = d(Q,P_i), \quad \textit{para} \quad i = 0, \ldots, n$$

então $P = Q$.

Demonstração: Suponhamos que $P \neq Q$. Então, pela Proposição 2.4.1, os pontos $P_0, \ldots, P_n$ pertencem ao hiperplano mediador $\mathcal{H}$ do segmento de recta $[PQ]$, pelo que $P_0, \ldots, P_n$ não geram um espaço afim de dimensão n, o que é impossível por hipótese. □

NOTA 2.4.4. Este corolário diz-nos, em particular, que em $\mathbb{R}^2$ um ponto fica univocamente determinado pelas distâncias a três pontos não colineares e que em $\mathbb{R}^3$ um ponto fica univocamente determinado pelas distâncias a quatro pontos não coplanares.

PROPOSIÇÃO 2.4.5. *Seja $\mathcal{H}$ um hiperplano de um espaço afim euclidiano $\mathcal{E}$ e P um ponto que não pertence a $\mathcal{H}$. Então existe um e um só ponto $P' \in \mathcal{E}$ tal que*

$$\mathcal{H} = \{X \in \mathcal{E} : \ d(X,P) = d(X,P')\},$$

isto é, tal que $\mathcal{H}$ é o hiperplano mediador de $[PP']$.

Ao ponto P' da Proposição 2.4.5 dá-se o nome de **ponto simétrico de P em relação a $\mathcal{H}$.**

Demonstração: **Existência:** Seja r o único eixo de $\mathcal{H}$ que passa em P e seja M o ponto de intersecção de r com $\mathcal{H}$. Como $P \notin \mathcal{H}$, temos que $M \neq P$ e então o vector $v := \overrightarrow{PM}$ é um vector normal a $\mathcal{H}$. Se considerarmos o ponto

$$P' := P + 2v,$$

temos que M é o ponto médio de $[PP']$ e que $\mathcal{H}$ é o hiperplano mediador de $[PP']$.

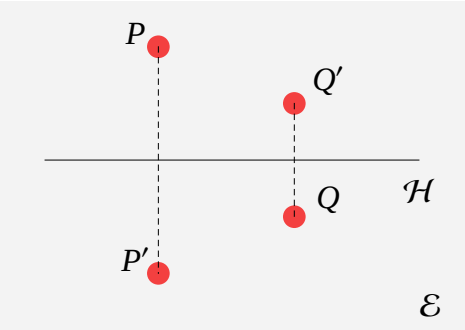

FIGURA 2.7. Pontos simétricos em relação ao hiperplano $\mathcal{H}$.

Unicidade: Se existir outro ponto P'' tal que $\mathcal{H}$ é o hiperplano mediador de $[PP'']$, então, pela Proposição 2.4.1, o vector $\overrightarrow{PP''}$ é perpendicular a $\mathcal{H}$, pelo que P'' tem de pertencer ao único eixo r de $\mathcal{H}$ que passa em P e o único ponto M tal que $r \cap \mathcal{H} = M$ tem de ser o ponto médio de $[PP'']$. Assim, temos necessariamente que

$$P'' = M + \overrightarrow{PM} = P'.$$

□

NOTA 2.4.6. Se P' é o ponto simétrico do ponto P em relação ao hiperplano $\mathcal{H}$ então P é o ponto simétrico de P' em relação a $\mathcal{H}$.

DEFINIÇÃO 2.4.7. *Seja $\mathcal{H}$ um hiperplano de um espaço afim euclidiano $\mathcal{E}$. Chama-se* **reflexão no hiperplano***indexreflexão! num hiperplano $\mathcal{H}$ à aplicação*

$$R_{\mathcal{H}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$$

tal que

$$R_{\mathcal{H}}(S) = \begin{cases} S & \text{se } S \in \mathcal{H} \\ S' & \text{se } S \notin \mathcal{H} \end{cases},$$

onde, para $S \notin \mathcal{H}$, o ponto S' é o ponto simétrico de S em relação a $\mathcal{H}$.

PROPOSIÇÃO 2.4.8. *Seja $\mathcal{H} = Q + W$ um hiperplano de um espaço afim euclidiano $\mathcal{E}$. A reflexão $R_{\mathcal{H}}$ no hiperplano $\mathcal{H}$ verifica as seguintes propriedades:*

i) Se $P = Q + w + v$, com $w \in W$ e $v \in W^{\perp}$, então

$$R_{\mathcal{H}}(P) = Q + w - v.$$

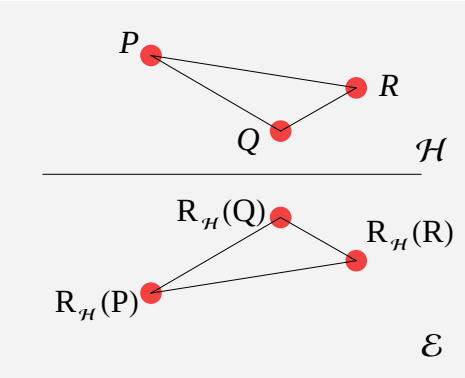

FIGURA 2.8. Reflexão no hiperplano $\mathcal{H}$.

ii) $R_{\mathcal{H}} \circ R_{\mathcal{H}} = id_{\mathcal{E}}$ *e, em particular,* $R_{\mathcal{H}}$ *é bijectiva.*

iii) Para $P, S \in \mathcal{E}$ *temos*

$$d(P, S) = d(R_{\mathcal{H}}(P), R_{\mathcal{H}}(S)).$$

Demonstração: ***i)*** Se $P \notin H$ então $i)$ é consequência da demonstração da Proposição 2.4.5. Se $P \in H$, então $P = Q + w$ com $w \in W$ e $i)$ decorre trivialmente.

ii) Esta propriedade é consequência imediata de $i)$.

iii) Usando $i)$ temos, para $P = Q + w_1 + v_1$ e $S = Q + w_2 + v_2$ com $w_1, w_2 \in W$ e $v_1, v_2 \in W^{\perp}$,

$$d(R_{\mathcal{H}}(P), R_{\mathcal{H}}(S)) = d(Q + w_1 - v_1, Q + w_2 - v_2) = \|(w_2 - w_1) + (v_1 - v_2)\|$$

e

$$d(P, S) = d(Q + w_1 + v_1, Q + w_2 + v_2) = \|(w_2 - w_1) - (v_1 - v_2)\|.$$

Como os vectores $w_2 - w_1$ e $v_1 - v_2$ são ortogonais, temos

$$\|(w_2 - w_1) + (v_1 - v_2)\| = \|(w_2 - w_1) - (v_1 - v_2)\|$$

e o resultado segue. □

COROLÁRIO 2.4.9. *Sejam* $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_m$ *hiperplanos de um espaço afim euclidiano* $\mathcal{E}$ *e* $R_{\mathcal{H}_1}, \ldots, R_{\mathcal{H}_m}$ *as reflexões em* $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_m$ *respectivamente. Então a aplicação*

$$f = R_{\mathcal{H}_1} \circ \cdots \circ R_{\mathcal{H}_m}$$

verifica

i) $d(P, Q) = d(f(P), f(Q)),\ \forall P, Q \in \mathcal{E}.$

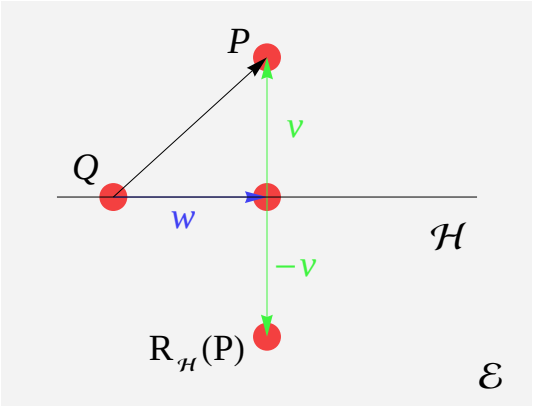

FIGURA 2.9. Reflexão no hiperplano $\mathcal{H}$.

ii) f *é bijectiva.*
iii) $f^{-1} = R_{\mathcal{H}_m} \circ \cdots \circ R_{\mathcal{H}_1}$.

Demonstração: A afirmação *i)* resulta imediatamente da Proposição 2.4.8 *iii)* e da definição de composição de funções. As afirmações *ii)* e *iii)* resultam de uma reflexão ser bijectiva, da composição de funções bijectivas ser ainda bijectiva e de uma reflexão ser a aplicação inversa de si própria.

□

LEMA 2.4.10. *Seja* $\mathcal{H} = Q + W$ *um hiperplano de um espaço afim euclidiano* $\mathcal{E}$ *e* u *um vector normal a* $\mathcal{H}$*. Então, para todo o* $X \in \mathcal{E}$*, temos*

$$R_{\mathcal{H}}(X) = X - 2\frac{\langle \overrightarrow{QX}, u\rangle}{\langle u, u\rangle}\, u.$$

Demonstração: Se $X \in \mathcal{E}$ então, como $\dim W^{\perp} = 1$ e $u \in W^{\perp}$, o ponto X pode escrever-se como $X = Q + w + \lambda u$, com $\lambda \in \mathbb{R}$ e $w \in W$. Então,

$$R_{\mathcal{H}}(X) = Q + w - \lambda u = X - 2\lambda u.$$

Por outro lado, como $\langle w, u\rangle = 0$, temos

$$\langle \overrightarrow{QX}, u\rangle = \langle (w + \lambda u), u\rangle = \lambda \langle u, u\rangle,$$

pelo que

$$\lambda = \frac{\langle \overrightarrow{QX}, u\rangle}{\langle u, u\rangle}$$

e o resultado segue. □

NOTA 2.4.11. O vector

$$\frac{\langle \overrightarrow{QX}, u\rangle}{\langle u, u\rangle} u$$

é a **projecção ortogonal** do vector $\overrightarrow{QX}$ em u, pelo que podemos enunciar o Lema 2.4.10 da seguinte forma:

Dado um hiperplano $\mathcal{H} := Q + W$, a imagem de qualquer ponto X por meio de $R_{\mathcal{H}}$ é o ponto $X - 2v$, onde v é a projecção ortogonal de $\overrightarrow{QX}$ num vector normal a $\mathcal{H}$.

O Lema 2.4.10 dá-nos uma forma prática de calcular a expressão analítica de uma reflexão num hiperplano.

EXEMPLO 2.4.12. Consideremos em $\mathbb{R}^4$ o hiperplano $\mathcal{H}$ definido (em relação ao referencial canónico) pela equação

$$x - 2z + w = 3. \tag{2.4.1}$$

O subespaço W das direcções de $\mathcal{H}$ é definido pela equação $x - 2z + w = 0$. Como a base canónica é ortonormada em relação ao produto interno usual temos

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \langle (x, y, z, w), (1, 0, -2, 1)\rangle = 0\} = \mathcal{L}\{(1, 0, -2, 1)\}^{\perp}$$

e então o vector $u := (1, 0, -2, 1)$ é normal a $\mathcal{H}$.

Como as coordenadas do ponto $Q := (3, 0, 0, 0)$ são solução da equação (2.4.1), temos que $Q \in \mathcal{H}$.

Assim, para qualquer ponto $X = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$, temos

$$\overrightarrow{QX} = (x - 3, y, z, w).$$

Como $\langle u, u\rangle = 6$, temos, usando o Lema 2.4.10,

$$\begin{aligned}
R_{\mathcal{H}}(X) &= (x, y, z, w) - 2\frac{\langle (x - 3, y, z, w), (1, 0, -2, 1)\rangle}{6}(1, 0, -2, 1) \\
&= (x, y, z, w) - \frac{1}{3}(x - 3 - 2z + w)(1, 0, -2, 1) \\
&= (x, y, z, w) - \left(\frac{x - 2z + w - 3}{3}, 0, \frac{-2x + 4z - 2w + 6}{3}, \frac{x - 2z + w - 3}{3}\right) \\
&= \left(\frac{2x + 2z - w + 3}{3}, y, \frac{2x - z + 2w - 6}{3}, \frac{-x + 2z + 2w + 3}{3}\right).
\end{aligned}$$

Conclui-se assim que $R_{\mathcal{H}}$ é a aplicação definida por

$$R_{\mathcal{H}}(x, y, z, w) = \left(\frac{2x + 2z - w + 3}{3}, y, \frac{2x - z + 2w - 6}{3}, \frac{-x + 2z + 2w + 3}{3}\right).$$

EXEMPLO 2.4.13. Consideremos, em $\mathbb{R}^3$, o plano

$$\mathcal{H} := (1,2,0) + \mathcal{L}\{(1,2,0),(0,1,1)\}.$$

Temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(1,2,0),(0,1,1)\}^{\perp} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x+2y=0 \ e \ y+z=0\} \\ &= \mathcal{L}\{(-2,1,-1)\}.\end{aligned}$$

Assim, $u := (-2,1,-1)$ é um vector normal ao plano $\mathcal{H}$, com $\|u\|^2 = 6$. Escolhendo agora um ponto $Q \in \mathcal{H}$, podemos determinar a expressão analítica da reflexão em $\mathcal{H}$. Considere-se então $Q := (1,2,0) \in \mathcal{H}$. Para qualquer $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos $\overrightarrow{QX} = (x-1, y-2, z)$, pelo que

$$\begin{aligned}R_{\mathcal{H}}(x,y,z) &= (x,y,z) - 2\frac{\langle (x-1,y-2,z),(-2,1,-1)\rangle}{6}(-2,1,-1) \\ &= \left(\frac{-x+2y-2z}{3}, \frac{2x+2y+z}{3}, \frac{-2x+y+2z}{3}\right).\end{aligned}$$

Assim, a reflexão no plano $\mathcal{H}$ é a aplicação definida por

$$R_{\mathcal{H}}(x,y,z) = \left(\frac{-x+2y-2z}{3}, \frac{2x+2y+z}{3}, \frac{-2x+y+2z}{3}\right).$$

EXEMPLO 2.4.14. Consideremos em $\mathbb{R}^2$ os pontos $P = (1,1)$ e $Q = (-1,3)$. Vamos determinar a expressão analítica da reflexão na mediatriz m de P e Q. O subespaço vectorial associado à recta definida por P e Q é o subespaço $\mathcal{L}\{\overrightarrow{PQ}\} = \mathcal{L}\{(-1,1)\}$, pelo que o vector $(-1,1)$ é um vector normal a m. Por outro lado, o ponto $(0,2)$ é o ponto médio do segmento de recta $[PQ]$. Aplicando o Lema 2.4.10 obtemos, para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$R_m(x,y) = (x,y) - \frac{2}{2}\langle (x,y-2),(-1,1)\rangle(-1,1) = (y-2, x+2).$$

NOTA 2.4.15. No Exemplo 2.4.14 não foi necessário determinar a recta m. Em geral, para encontrar a expressão analítica da reflexão num hiperplano mediador $\mathcal{H}$ de dois pontos P e Q, basta determinar o ponto médio de $[PQ]$ e a direção da recta definida por P e Q. Com efeito, para aplicar o Lema 2.4.10 basta-nos conhecer um ponto de $\mathcal{H}$ e um vector normal a $\mathcal{H}$, que neste caso são dados respectivamente pelo ponto médio de $[PQ]$ e por um vector director da recta PQ.

Vejamos agora uma propriedade importante das reflexões.

TEOREMA 2.4.16. *Sejam $P_0, \ldots, P_k$ pontos distintos de um espaço afim euclidiano $\mathcal{E}$, com $k \geq 1$, e $Q_0, \ldots, Q_k$ pontos de $\mathcal{E}$ que satisfazem*

$$d(P_i, P_j) = d(Q_i, Q_j), \quad \forall i, j \in \{0, \ldots, k\}.$$

Então existe uma aplicação $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ tal que

i) f ou é uma reflexão num hiperplano ou uma composição de, no máximo, $k+1$ reflexões em hiperplanos de $\mathcal{E}$;

ii) $f(P_i) = Q_i, \ \forall i \in \{0, \ldots, k\}$.

Demonstração: Notemos primeiro que, se $P_i = Q_i$ para todo o $i \in \{0, \ldots, k\}$, a afirmação é trivial. Com efeito, neste caso toma-se $f = id_{\mathcal{E}}$ pois, para qualquer hiperplano $\mathcal{H}$, temos $R_{\mathcal{H}} \circ R_{\mathcal{H}} = Id_{\mathcal{E}}$.

Caso contrário vamos fazer a demonstração por indução no número $m = k+1$ de pontos P_i, com $i = 0, \ldots, k$.

Se $m = 2$ e supondo, sem perda de generalidade, que $P_0 \neq Q_0$, consideremos a reflexão $R_{\mathcal{H}_0}$, onde $\mathcal{H}_0$ é o hiperplano mediador de P_0 e Q_0. Então, $R_{\mathcal{H}_0}(P_0) = Q_0$. Se, além disso, $R_{\mathcal{H}_0}(P_1) = Q_1$, então $R_{\mathcal{H}_0}$ satisfaz as condições pretendidas. Se $R_{\mathcal{H}_0}(P_1) \neq Q_1$, considera-se $\mathcal{H}_1$, o hiperplano mediador de $R_{\mathcal{H}_0}(P_1)$ e Q_1. Então $Q_0 \in \mathcal{H}_1$. Com efeito, por hipótese, temos

$$\begin{aligned} d(Q_0, Q_1) &= d(P_0, P_1) = d(R_{\mathcal{H}_0}(P_0), R_{\mathcal{H}_0}(P_1)) \\ &= d(Q_0, R_{\mathcal{H}_0}(P_1)), \end{aligned}$$

onde usámos a Proposição 2.4.8 - *iii)* e o facto que $R_{\mathcal{H}_0}(P_0) = Q_0$. Consequentemente,

$$\left(R_{\mathcal{H}_1} \circ R_{\mathcal{H}_0}\right)(P_0) = R_{\mathcal{H}_1}(Q_0) = Q_0 \quad \text{e} \quad \left(R_{\mathcal{H}_1} \circ R_{\mathcal{H}_0}\right)(P_1) = Q_1,$$

pelo que a aplicação

$$R_{\mathcal{H}_1} \circ R_{\mathcal{H}_0}$$

satisfaz as condições pretendidas.

Suponhamos agora o teorema demonstrado para m pontos e vamos demonstrá-lo para $m+1$ pontos. Sejam então $P_0, \ldots, P_m$ pontos distintos de $\mathcal{E}$ e $Q_0, \ldots, Q_m$ pontos de $\mathcal{E}$ que satisfazem

$$d(P_i, P_j) = d(Q_i, Q_j), \quad \forall i, j \in \{0, \ldots, m\}.$$

Por hipótese de indução, considerando os m pontos $P_0, \ldots, P_{m-1}$ e os m pontos $Q_0, \ldots, Q_{m-1}$, existe uma aplicação $g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ que satisfaz:

i) g ou é uma reflexão ou uma composição de, no máximo, m reflexões;

ii) $g(P_i) = Q_i,\ \forall i \in \{0, \ldots, m-1\}$.

Se $g(P_m) = Q_m$, então g é a aplicação pretendida. Se $g(P_m) \neq Q_m$, considera-se o hiperplano $\mathcal{H}$ mediador de $g(P_m)$ e Q_m. Então $Q_1, \ldots, Q_{m-1} \in \mathcal{H}$. Com efeito temos

$$d(Q_i, Q_m) = d(P_i, P_m) = d(g(P_i), g(P_m)) = d(Q_i, g(P_m)),$$

para todo o $i \in \{0, \ldots, m-1\}$, pois g é uma composição de reflexões, (e consequentemente satisfaz a Proposição 2.4.9 - i)). Assim, a aplicação $f := R_{\mathcal{H}} \circ g$ verifica

$$f(P_i) = Q_i,\ \forall i \in \{0, \ldots, m\}$$

e o resultado segue. □

Exemplo 2.4.17. Consideremos em $\mathbb{R}^2$ os pontos $P_0 = (0,0)$ e $P_1 = (1,1)$ e os pontos $Q_0 = (0,2)$ e $Q_1 = (-1,3)$. Como $d(P_0, P_1) = \sqrt{2} = d(Q_0, Q_1)$, temos, pelo Teorema 2.4.16, que existe uma reflexão ou uma composição de duas reflexões f tal que $f(P_0) = Q_0$ e $f(P_1) = Q_1$.

Para construir esta aplicação podemos aplicar o processo usado na demonstração do Teorema 2.4.16 . Considera-se em primeiro lugar a reflexão R_m na mediatriz m de P_0 e Q_0, isto é, a aplicação $R_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$R_m(x, y) = (x, -y + 2).$$

Como $R_m(P_1) = (1,1) \neq Q_1$, determinamos a reflexão na mediatriz l de $R_m(P_1)$ e Q_1, isto é, a aplicação $R_l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$R_l(x, y) = (y - 2, x + 2),\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

A aplicação $f := R_l \circ R_m$ dada por

$$f(x, y) = R_l(x, -y + 2) = (-y, x + 2)$$

satisfaz a condição i) do Teorema 2.4.16 e é tal que

$$f(P_0) = Q_0 \quad \text{e} \quad f(P_1) = Q_1.$$

2.5. Isometrias

Definição 2.5.1. *Seja $\mathcal{E}$ um espaço afim euclidiano. Uma aplicação $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ diz-se uma* **isometria** *(ou* **moção rígida***) se, para quaisquer pontos $P, Q \in \mathcal{E}$, se tem*

$$d(P, Q) = d(f(P), f(Q)).$$

NOTA 2.5.2. Muitos autores definem isometria como sendo uma aplicação *bijectiva* tal que, para quaisquer pontos P, Q de $\mathcal{E}$ se tem

$$d(P,Q) = d(f(P), f(Q)).$$

No entanto, como veremos adiante, a bijectividade é uma consequência do facto da aplicação manter a distância entre pontos.

EXEMPLO 2.5.3.

(i) (**Reflexão num hiperplano.**) Uma reflexão num hiperplano $\mathcal{H}$ é uma isometria (ver a Proposição 2.4.8).

(ii) Pelo Corolário 2.4.9 qualquer composição de um número finito de reflexões em hiperplanos é também uma isometria.

(iii) (**Translação.**) Seja $\mathcal{E}$ um espaço afim euclidiano associado a um espaço vectorial V e seja v um vector de V. A aplicação $T_v : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ definida por $T_v(P) = P + v$, para todo o ponto P de $\mathcal{E}$ é uma isometria a que se dá o nome de **translação** por meio de v.

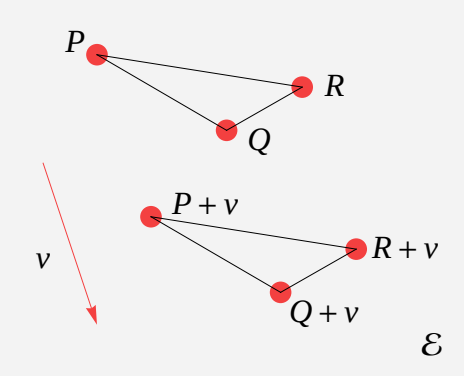

FIGURA 2.10. Translação associada ao vector v.

Se $\mathcal{E}$ tem dimensão n e $R = (O; B)$ é um referencial de $\mathcal{E}$, então sendo $v_B = (v_1, \ldots, v_n)$ as coordenadas do vector v na base B e $X_R = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ as coordenadas de um ponto $X \in \mathcal{E}$ no referencial R, temos que $T_v(X) = X + v$ é o ponto de coordenadas $(x_1 + v_1, \ldots, x_n + v_n)$.

(iv) (**Inversão.**) Seja $\mathcal{E}$ um espaço afim euclidiano associado a um espaço vectorial V e P um ponto de $\mathcal{E}$. Qualquer ponto X de $\mathcal{E}$ pode ser escrito na forma $X = P + \overrightarrow{PX}$. A aplicação $\rho_P : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$

definida por

$$\rho_P(X) = \rho_P(P + \overrightarrow{PX}) := P - \overrightarrow{PX}$$

ou, equivalentemente, pela combinação afim $\rho_P(X) := 2P - X$, para todo o $X \in \mathcal{E}$, é uma isometria a que se dá o nome de **inversão de centro em** P.

Com efeito, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{E}$ temos

$$\begin{aligned} d(\rho_P(X), \rho_P(Y)) &= d(P - \overrightarrow{PX}, P - \overrightarrow{PY}) = \|\overrightarrow{PX} - \overrightarrow{PY}\| \\ &= (P + \overrightarrow{PX}, P + \overrightarrow{PY}) = d(X, Y). \end{aligned}$$

Alguns autores chamam **reflexão** em P a esta aplicação. Uma inversão (de centro em P) num espaço euclidiano de dimensão 2 chama-se uma **meia-volta** (de centro em P).

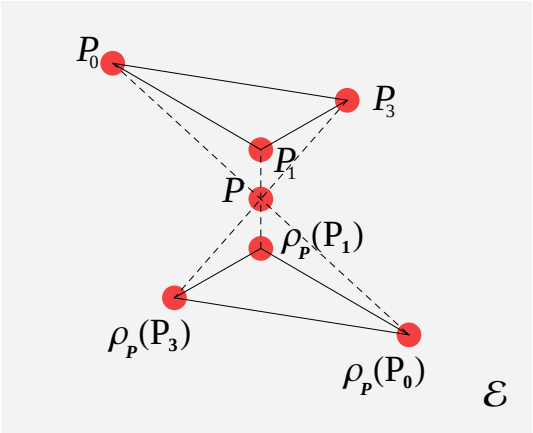

FIGURA 2.11. Inversão de centro P.

EXEMPLO 2.5.4.

(i) Em $\mathbb{R}^3$ a translação por meio do vector $v = (3, -1, \frac{1}{2})$ é a aplicação $T_v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T_v(x, y, z) = \left(x + 3, y - 1, z + \frac{1}{2}\right), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(ii) Em $\mathbb{R}^3$ a inversão de centro em $P = (1, 2, 0)$ faz corresponder a cada ponto $X = P + \overrightarrow{PX}$ o ponto $P - \overrightarrow{PX}$, pelo que é a aplicação

$\rho_P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{aligned}\rho_P(x,y,z) &= \rho_P\left(1+(x-1), 2+(y-2), 0+z\right)\\ &= (1-(x-1), 2-(y-2), -z)) = (-x+2, -y+4, -z).\end{aligned}$$

Vejamos agora uma proposição que generaliza o Corolário 2.4.9 - i) a todas as isometrias.

PROPOSIÇÃO 2.5.5. *Se f e g são isometrias de um espaço afim euclidiano $\mathcal{E}$ então a composição $f \circ g$ também é uma isometria.*

Demonstração: Sejam f e g duas isometrias. Dados dois pontos $P, Q \in \mathcal{E}$ quaisquer temos $d(P,Q) = d(g(P), g(Q))$ pois g é uma isometria. Por outro lado, como f é uma isometria, temos

$$d(f(g(P)), f(g(Q))) = d(g(P), g(Q)).$$

Conclui-se assim que

$$d\left((f \circ g)(P), (f \circ g)(Q)\right) = d(P,Q), \ \forall P, Q \in \mathcal{E}$$

e então $f \circ g$ é uma isometria. □

Usando esta proposição podemos obter outras isometrias.

EXEMPLO 2.5.6. (**Reflexão com deslize.**) Se $\mathcal{H}$ é um hiperplano de um espaço afim euclidiano $\mathcal{E}$ associado ao subespaço vectorial W e $v \neq 0$ é um vector de W, a isometria $T_v \circ R_{\mathcal{H}}$ designa-se **reflexão com deslize** ou **reflexão deslizante** em $\mathcal{H}$ por meio de v.

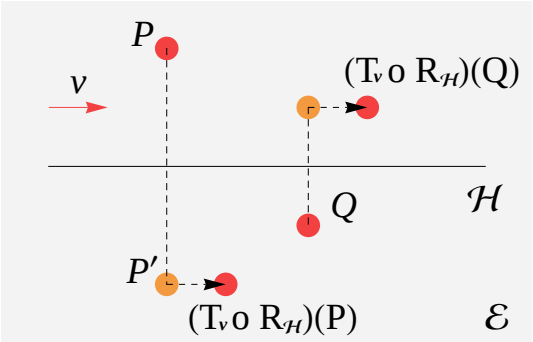

FIGURA 2.12. Reflexão com deslize no hiperplano $\mathcal{H}$ por meio de v.

EXEMPLO 2.5.7. Em $\mathbb{R}^2$ é fácil verificar que a reflexão R_r na recta

$$r := (0,0) + \mathcal{L}\{(0,1)\}$$

é a aplicação $R_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$R_r(x,y) = (-x,y).$$

Então a reflexão com deslize em r por meio do vector $v = (0,\sqrt{2})$ é a aplicação $T_v \circ R_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$R_r(x,y) = (-x, y+\sqrt{2}).$$

PROPOSIÇÃO 2.5.8. *Se $\mathcal{H} = P + W$ é um hiperplano de $\mathcal{E}$ associado a um subespaço vectorial W e v é um vector de W então $T_v \circ R_{\mathcal{H}} = R_{\mathcal{H}} \circ T_v$.*

Demonstração: Seja $X \in \mathcal{E}$. Podemos escrever $X = P + w + u$ onde $w \in W$ e $u \in W^{\perp}$. Pela Proposição 2.4.8 - i) temos

$$(T_v \circ R_{\mathcal{H}})(X) = T_v(P + w - u) = P + v + w - u.$$

Por outro lado, $T_v(X) = P + v + w + u$. Como $v \in W$, temos

$$T_v(X) = P + (v + w) + u,$$

onde $v + w \in W$ e $u \in W^{\perp}$, pelo que, pela Proposição 2.4.8 - i), temos

$$(R_{\mathcal{H}} \circ T_v)(X) = P + v + w - u.$$

Conclui-se assim que, para todo o ponto $X \in \mathcal{E}$,

$$(T_v \circ R_{\mathcal{H}})(X) = (R_{\mathcal{H}} \circ T_v)(X)$$

e então $T_v \circ R_{\mathcal{H}} = R_{\mathcal{H}} \circ T_v$. □

2.5.1. Isometrias e Reflexões.

PROPOSIÇÃO 2.5.9. *Se uma isometria $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ fixa $n+1$ pontos independentes $P_0, \ldots, P_n$ de um espaço afim euclidiano $\mathcal{E}$ de dimensão n, então f é a aplicação identidade.*

Demonstração: Seja $X \in \mathcal{E}$. Como f é uma isometria e

$$f(P_i) = P_i, \ \ \forall i \in \{0, \ldots, n\},$$

temos

$$d(X, P_i) = d(f(X), P_i), \ \ \forall i \in \{0, \ldots, n\}.$$

Como os pontos $P_0, \ldots, P_n$ geram o espaço $\mathcal{E}$ temos, pelo Corolário 2.4.3, que $f(X) = X$. Conclui-se assim que $f = id_{\mathcal{E}}$. □

TEOREMA 2.5.10. *Seja $\mathcal{E}$ um espaço afim euclidiano de dimensão n. Qualquer isometria f de $\mathcal{E}$ pode ser escrita como uma composição de, no máximo, $n+1$ reflexões.*

Demonstração: Seja f uma isometria e considere-se $n+1$ pontos independentes $P_0, \ldots, P_n \in \mathcal{E}$. Tomando os pontos $Q_i := f(P_i)$, para $i = 0, \ldots, n$, temos (como f é uma isometria)

$$d(P_i, P_j) = d(Q_i, Q_j), \quad \forall i, j \in \{0, \ldots, n\}.$$

Assim, usando o Teorema 2.4.16, sabemos que existe uma isometria g, que é uma composição de, no máximo $n+1$ reflexões, e satisfaz $g(P_i) = Q_i$ para todo o $i \in \{0, \ldots, n\}$. Pela Proposição 2.4.9, a sua inversa g^{-1} é também uma isometria. Como

$$(g^{-1} \circ f)(P_i) = P_i, \quad \forall i \in \{0, \ldots, n\},$$

conclui-se pela Proposição 2.5.9 que $g^{-1} \circ f = id_{\mathcal{E}}$ e então $f = g$. □

Com este teorema podemos reduzir o estudo das propriedades das isometrias ao estudo das propriedades da composição de reflexões.

COROLÁRIO 2.5.11. *Qualquer isometria é uma aplicação bijectiva e a inversa de uma isometria é uma isometria.*

Demonstração: Seja f uma isometria de um espaço afim euclidiano $\mathcal{E}$ de dimensão n. Pelo Teorema 2.5.10 existem k hiperplanos $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_k$, com $k \leq n+1$ tais que

$$f = R_{\mathcal{H}_1} \circ \cdots \circ R_{\mathcal{H}_k}.$$

Pela Proposição 2.4.9 temos que uma composição de reflexões é uma isometria bijectiva cuja aplicação inversa é também uma composição de reflexões e o resultado segue. □

NOTA 2.5.12. Uma vez que a aplicação identidade $id_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ é uma isometria de $\mathcal{E}$, temos, como consequência da Proposição 2.5.5 e do Corolário 2.5.11 que o conjunto de todas as isometrias de $\mathcal{E}$ com a composição de aplicações forma um grupo (não comutativo). Este grupo é normalmente designado por $\mathrm{Iso}(\mathcal{E})$. Pelo Teorema 2.5.10 tem-se que $\mathrm{Iso}(\mathcal{E})$ é gerado pelas reflexões em hiperplanos de $\mathcal{E}$.

PROPOSIÇÃO 2.5.13. *O subconjunto $\mathcal{T} \subset \mathrm{Iso}(\mathcal{E})$ formado por todas as translações é um subgrupo de* $\mathrm{Iso}(\mathcal{E})$.

Demonstração: Dado um grupo G e um subconjunto $A \subset G$, para determinar se A é um subgrupo de G temos de verificar que $A \neq \emptyset$, que A é fechado para a operação do grupo e que A contém todos os inversos de elementos de A.

Neste caso temos $\mathcal{T} \neq \emptyset$ pois, por exemplo, a aplicação $Id_{\mathcal{E}}$ (a translação por meio do vector nulo) pertence a $\mathcal{T}$. Além disso, dadas duas translações T_v e T_w, temos, para qualquer $X \in \mathcal{E}$,

$$(T_v \circ T_w)(X) = T_v(X + w) = X + w + v = T_{v+w}(X),$$

pelo que

$$T_v \circ T_w = T_{v+w} \in \mathcal{T}$$

e então $\mathcal{T}$ é fechado para a composição de aplicações. Analogamente, como $T_v^{-1} = T_{-v}$, temos que a aplicação inversa de uma translação é ainda uma translação. Conclui-se assim que $\mathcal{T}$ é um subgrupo de $\mathrm{Iso}(\mathcal{E})$. □

Proposição 2.5.14. *Qualquer isometria de um espaço afim euclidiano $\mathcal{E}$ de dimensão n fica univocamente determinada pelas imagens de $n+1$ pontos independentes.*

Demonstração: Temos de mostrar que se f e g são isometrias de $\mathcal{E}$ tais que $f(P_i) = g(P_i)$ para $i = 0, \ldots, n$, onde $P_0, \ldots, P_n$ são $n+1$ pontos independentes de $\mathcal{E}$, então $f = g$. Como, pelo Corolário 2.5.11, a aplicação g é bijectiva, temos $(g^{-1} \circ f)(P_i) = P_i$ para todo o $i \in \{0, \ldots, n\}$. Além disso, g^{-1} é uma isometria, pelo que $g^{-1} \circ f$ também é uma isometria e então, pela Proposição 2.5.9, temos que $g^{-1} \circ f = id_{\mathcal{E}}$, ou seja que $g = f$. □

Exemplo 2.5.15. Como casos particulares desta proposição temos, por exemplo,

(i) qualquer isometria de $\mathbb{R}^2$ fica univocamente determinada pelas imagens de três pontos não colineares.
(ii) qualquer isometria de $\mathbb{R}^3$ fica univocamente determinada pelas imagens de quatro pontos não coplanares.

Proposição 2.5.16. *Sejam $P_0, \ldots, P_n$ pontos independentes de um espaço afim euclidiano $\mathcal{E}$ de dimensão n e $Q_0, \ldots, Q_n$, outro conjunto de $n+1$ pontos tais que*

$$d(P_i, P_j) = d(Q_i, Q_j), \quad \forall i, j \in \{0, \ldots, n\}.$$

Então existe uma única isometria $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ tal que

$$f(P_i) = Q_i, \quad \forall i \in \{0, \ldots, n\}.$$

Demonstração: A existência da isometria é dada pelo Teorema 2.4.16, enquanto que a unicidade decorre da Proposição 2.5.14. □

2.5.2. Isometrias e hiperplanos.

LEMA 2.5.17. *A imagem de um hiperplano por meio de uma isometria é um hiperplano.*

Demonstração: Seja $\mathcal{H}$ um hiperplano de $\mathcal{E}$. Pela proposição 2.4.5, temos que $\mathcal{H}$ pode ser descrito como o hiperplano mediador de dois pontos P e P', ou seja

$$\mathcal{H} = \{X \in \mathcal{E} : \ d(X, P) = d(X, P')\}.$$

Se $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ é uma isometria temos, para $X \in \mathcal{H}$,

$$d(f(X), f(P)) = d(f(X), f(P')),$$

pelo que $f(\mathcal{H})$ está contido no hiperplano

$$\mathcal{H}' := \{Y \in \mathcal{E} : \ d(Y, f(P)) = d(Y, f(P'))\}.$$

Como f^{-1} também é uma isometria, temos, pelo mesmo motivo, que

$$f^{-1}(\mathcal{H}') \subset \mathcal{H}$$

e então

$$\mathcal{H}' = f\left(f^{-1}(\mathcal{H}')\right) \subset f(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}'.$$

Conclui-se assim que $f(\mathcal{H}) = \mathcal{H}'$ e $\mathcal{H} = f^{-1}(\mathcal{H}')$. □

PROPOSIÇÃO 2.5.18. *Seja $\mathcal{E}$ um espaço afim euclidiano. A imagem de um subespaço afim $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ de dimensão k por meio de uma isometria é um subespaço afim de dimensão k.*

Demonstração: Seja $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ um subespaço afim de dimensão k. Então $\mathcal{F}$ é a intersecção de $n - k$ hiperplanos

$$\mathcal{F} = \mathcal{H}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{H}_{n-k}.$$

Dada uma isometria $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ temos

$$f(\mathcal{F}) = f(\mathcal{H}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{H}_{n-k})$$

e então, como f é injectiva, temos

$$f(\mathcal{F}) = f(\mathcal{H}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{H}_{n-k}) = f(\mathcal{H}_1) \cap \cdots \cap f(\mathcal{H}_{n-k}).$$

Pelo Lema 2.5.17, cada imagem $f(\mathcal{H}_i)$ é um hiperplano, para $i = 1, \ldots, n-k$, pelo que $f(\mathcal{F})$ é a intersecção (não vazia) de $n - k$ hiperplanos, ou seja um subespaço afim $\mathcal{F}'$ de dimensão $d' \geq k$.

Analogamente, como f^{-1} é também uma isometria, temos que

$$\mathcal{F} = f^{-1}(\mathcal{F}')$$

é um subespaço afim de dimensão $d \geq d'$. Como a dimensão de $\mathcal{F}$ é k, conclui-se que $d' = k$. □

PROPOSIÇÃO 2.5.19. *Seja $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ uma isometria dum espaço afim euclidiano $\mathcal{E}$ e sejam $P_0, \ldots, P_k$ pontos de $\mathcal{E}$. Então*

$$f(\langle P_0, \ldots, P_k \rangle) = \langle f(P_0), \ldots, f(P_k) \rangle.$$

Demonstração: Pela Proposição 2.5.18 sabemos que $f(\langle P_0, \ldots, P_k \rangle)$ é um subespaço afim de $\mathcal{E}$. Como este espaço contém necessariamente os pontos $f(P_0), \ldots, f(P_k)$, conclui-se que

$$f(\langle P_0, \ldots, P_k \rangle) \supseteq \langle f(P_0), \ldots, f(P_k) \rangle.$$

Da mesma forma, como f^{-1} é uma isometria, concluímos que

$$f^{-1}(\langle f(P_0), \ldots, f(P_k) \rangle) \supseteq \langle f^{-1}(f(P_0)), \ldots, f^{-1}(f(P_k)) \rangle = \langle P_0, \ldots, P_k \rangle,$$

e então

$$\langle f(P_0), \ldots, f(P_k) \rangle = f\left(f^{-1}(\langle f(P_0), \ldots, f(P_k) \rangle)\right) \supseteq f(\langle P_0, \ldots, P_k \rangle),$$

pelo que

$$f(\langle P_0, \ldots, P_k \rangle) = \langle f(P_0), \ldots, f(P_k) \rangle.$$

□

PROPOSIÇÃO 2.5.20. *Seja $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ uma isometria dum espaço afim euclidiano $\mathcal{E}$ que fixa os pontos $P_0, \ldots, P_k \in \mathcal{E}$. Então f fixa todos os pontos do subespaço afim*

$$\mathcal{F} = \langle P_0, \ldots, P_k \rangle.$$

Demonstração: Pela Proposição 2.5.19 sabemos que $f(\mathcal{F})$ é o subespaço afim gerado por $f(P_0) = P_0, \ldots, f(P_k) = P_k$, ou seja $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. Seja S um ponto qualquer de $\mathcal{F}$. Então $f(S)$ é um ponto de $\mathcal{F}$ e

$$d(S, P_i) = d(f(S), P_i), \quad \forall i \in \{0, \ldots, k\}.$$

Se $f(S) \neq S$, teríamos $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$, onde $\mathcal{H}$ é o hiperplano mediador de S e $f(S)$, o que é absurdo, dado que $S \notin \mathcal{H}$. Conclui-se assim que $f(S) = S$ e então $f_{|\mathcal{F}} = Id_{\mathcal{F}}$. □

COROLÁRIO 2.5.21. *Se uma isometria $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ dum espaço afim euclidiano $\mathcal{E}$ de dimensão n fixa n pontos independentes $P_0, \ldots, P_{n-1}$ (ou seja que geram um hiperplano $\mathcal{H}$), então ou f é a identidade ou é a reflexão no hiperplano $\mathcal{H}$.*

Demonstração: Suponhamos que f fixa n pontos $P_0, \ldots, P_{n-1}$ que geram um hiperplano $\mathcal{H}$ e que $f \neq id_{\mathcal{E}}$. Pela Proposição 2.5.20, todos os pontos do hiperplano $\mathcal{H}$ definido por $P_0, \ldots, P_{n-1}$ são pontos fixos de f. Seja S um ponto tal que $S \notin \mathcal{H}$. Então os pontos $P_0, ...P_{n-1}, S$ geram $\mathcal{E}$.

Se f não é a identidade, temos que $f(S) \neq S$ (caso contrário f fixaria $n+1$ pontos independentes num espaço de dimensão n e seria a identidade). Como f é uma isometria e $f(P_0) = P_0, \ldots, f(P_{n-1}) = P_{n-1}$, temos

$$d(f(S), P_i) = d(S, P_i), \quad \forall i = 0, \ldots, n-1,$$

pelo que o hiperplano $\mathcal{H}$ gerado por $P_0, \ldots, P_{n-1}$ é o hiperplano mediador do segmento de recta $[Sf(S)]$. Conclui-se assim que $f(S)$ é o ponto simétrico de S em relação a $\mathcal{H}$. Considerando a reflexão $R_{\mathcal{H}}$ no hiperplano $\mathcal{H}$ temos que f e $R_{\mathcal{H}}$ têm o mesmo valor em $n+1$ pontos independentes pelo que $f = R_{\mathcal{H}}$. □

Este resultado é facilmente generalizável.

COROLÁRIO 2.5.22. *Se uma isometria $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ dum espaço afim euclidiano $\mathcal{E}$ de dimensão n fixa $n-k$ pontos independentes $P_0, \ldots, P_{n-k-1}$ com $k \geq 0$ (ou seja que geram um $(n-k-1)$-plano $\mathcal{F}$), então ou f é a identidade ou pode ser escrita como composição de, no máximo, $k+1$ reflexões em hiperplanos que contêm $\mathcal{F}$.*

Demonstração: Este resultado prova-se facilmente por indução em k. Para $k = 0$ o resultado é o Corolário 2.5.21. Vamos pois assumir que é válido para $n-k$ pontos independentes e que f fixa $n-(k+1)$ pontos independentes $P_0, \ldots, P_{n-k-2}$ que geram um $(n-k-2)$-plano $\mathcal{F}$. Seja S um ponto de $\mathcal{E}$ tal que $S \notin \mathcal{F}$ (pelo que os pontos $P_0, ..., P_{n-k-2}, S$ são independentes).

Se $f(S) = S$ temos, por hipótese de indução, que ou f é a identidade ou pode ser escrita como composição de, no máximo, $k+1$ reflexões em hiperplanos que contêm o $(n-k-1)$-plano $\langle P_0, ..., P_{n-k-2}, S\rangle$ e que, consequentemente, contêm $\mathcal{F}$.

Se $f(S) \neq S$ então, se $\mathcal{H}$ é o hiperplano mediador de S e $f(S)$, temos que $g := R_{\mathcal{H}} \circ f$ é uma isometria que fixa os pontos $P_0, ..., P_{n-k-2}$ e S,

pelo que ou é a identidade ou pode ser escrita como composição de, no máximo, $k+1$ reflexões em hiperplanos de $\mathcal{E}$ que contêm o $(n-k-1)$-plano $\langle P_0, ..., P_{n-k-2}, S\rangle$. Assim $f = R_{\mathcal{H}} \circ g$ pode ser escrita como composição de, no máximo, $k+2$ reflexões em hiperplanos e, como os pontos $P_0, ..., P_{n-k-2}$ pertencem a $\mathcal{H}$ (pois $d(P_i, S) = d(P_i, f(S))$ para $i = 0, \ldots, n-k-2$), temos que a intersecção destes hiperplanos contém $\mathcal{F}$. □

2.5.3. Aplicações ortogonais e isometrias. Muitas das propriedades das isometrias que provámos anteriormente são, em geral, verificadas por aplicações afins. Vamos ver agora que, de facto, as isometrias são isomorfismos afins. Para isso, como qualquer isometria é uma composição de reflexões e a composição de aplicações afins é uma aplicação afim, basta verificar que qualquer reflexão é uma aplicação afim.

PROPOSIÇÃO 2.5.23. *Uma reflexão $R_{\mathcal{H}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ num hiperplano $\mathcal{H}$ dum espaço afim euclidiano $\mathcal{E}$ é uma aplicação afim.*

Demonstração: Seja V o espaço vectorial associado a $\mathcal{E}$ e W o espaço das direções do hiperplano $\mathcal{H}$. Então, como $V = W \oplus W^{\perp}$, considerando um ponto $P \in \mathcal{H}$, temos que qualquer $X \in \mathcal{E}$ pode ser escrito na forma

$$X = P + w + v$$

onde $w \in W$ e $v \in W^{\perp}$ (isto é, v e w são tais que $\overrightarrow{PX} = w + v$). Assim, para qualquer $X \in \mathcal{E}$, temos

$$R_{\mathcal{H}}(X) = P + w - v$$

e então

$$\overrightarrow{R_{\mathcal{H}}(P)R_{\mathcal{H}}(X)} = \overrightarrow{PR_{\mathcal{H}}(X)} = w - v = \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{PX}),$$

onde $\overrightarrow{\phi} : V \to V$ é a aplicação que a cada vector $u = w + v \in V$, com $w \in W$ e $v \in W^{\perp}$ faz corresponder o vector

$$\overrightarrow{\phi}(u) = \overrightarrow{\phi}(w + v) := w - v.$$

Verifica-se facilmente que esta aplicação é linear pelo que $R_{\mathcal{H}}$ é uma aplicação afim. □

COROLÁRIO 2.5.24. *Qualquer isometria de um espaço afim euclidiano é um isomorfismo afim.*

Demonstração: Consequência imediata da Proposição 2.5.23 e do Corolário 2.5.11. □

NOTA 2.5.25. O Lema 2.5.17 e as Proposições 2.5.18 e 2.5.20 são consequências do Corolário 2.5.24 e das Proposições 1.3.5 e 1.3.11 para aplicações afins.

As aplicações lineares associadas a isometrias verificam uma propriedade adicional: são **aplicações ortogonais**, ou seja preservam o produto interno (ver Apêndice C).

PROPOSIÇÃO 2.5.26. *Seja $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ uma isometria de um espaço euclidiano $\mathcal{E}$ associado a espaço vectorial real V. Então a aplicação linear $\overrightarrow{f} : V \to V$ associada a f é uma aplicação ortogonal.*

Demonstração: Temos de mostrar que

$$\langle \overrightarrow{f}(u), \overrightarrow{f}(v)\rangle = \langle u, v\rangle, \quad \forall u, v \in V.$$

Como f é uma isometria, escolhendo um ponto $P \in \mathcal{E}$ qualquer, temos

$$\|\overrightarrow{f}(u)\| = \|\overrightarrow{f(P)f(P+u)}\| = d(f(P), f(P+u)) = d(P, P+u) = \|u\|,$$

para todo o vector $u \in V$, pelo que se conclui que a aplicação linear associada a uma isometria preserva normas.

Como para $u, v \in V$ temos

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle,$$

conclui-se que

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right), \quad \forall u, v \in V$$

e então

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{f}(u), \overrightarrow{f}(v)\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{f}(u) + \overrightarrow{f}(v)\|^2 - \|\overrightarrow{f}(u)\|^2 - \|\overrightarrow{f}(v)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{f}(u+v)\|^2 - \|\overrightarrow{f}(u)\|^2 - \|\overrightarrow{f}(v)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) = \langle u, v\rangle.\end{aligned}$$

□

Reciprocamente temos o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 2.5.27. *Seja $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ uma aplicação afim definida num espaço afim euclidiano $\mathcal{E}$ cuja aplicação linear associada é ortogonal. Então f é uma isometria de $\mathcal{E}$.*

Demonstração: Seja $\overrightarrow{\phi} : V \to V$ a aplicação linear associada a f. Para quaisquer dois pontos $P, Q \in \mathcal{E}$ temos

$$d(f(P), f(Q)) = \|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\| = \|\overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{PQ})\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = d(P, Q),$$

onde usámos o facto que $\overrightarrow{\phi}$ é ortogonal e, portanto, preserva normas:

$$\|\overrightarrow{\phi}(u)\|^2 = \langle \overrightarrow{\phi}(u), \overrightarrow{\phi}(u)\rangle = \langle u, u\rangle = \|u\|^2.$$

□

Uma matriz A que representa uma aplicação ortogonal $\overrightarrow{\phi} : V \to V$ em relação a uma base ortonormada de V é uma matriz ortogonal, i.e. satisfaz

$$A^T A = AA^T = Id,$$

pelo que $(\det A)^2 = 1$ e então $\det A = \pm 1$. Como o determinante de uma representação matricial de $\overrightarrow{\phi}$ não depende da base escolhida podemos designá-lo por $\det \overrightarrow{\phi}$.

Definição 2.5.28. *Seja $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ uma isometria e $\overrightarrow{\phi}$ a aplicação ortogonal associada a f. Diz-se que f é uma isometria* **directa** *se* $\det \overrightarrow{\phi} = 1$ *e que f é uma isometria* **inversa** *se* $\det \overrightarrow{\phi} = -1$.

Nota 2.5.29. Nalguns contextos, especialmente em Física, dá-se o nome de moções rígidas ou isometrias apenas às isometrias directas.

Exemplo 2.5.30. Seja v um vector de V e $f := T_v : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ a translação por meio de v. Sabemos já que a aplicação ortogonal associada a uma translação é a identidade (ver Exemplo 1.3.4). Conclui-se então que uma translação é uma isometria directa.

Exemplo 2.5.31. Consideremos a isometria $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = (6 + y, 3 + x).$$

A aplicação ortogonal associada a f é a aplicação $\overrightarrow{\phi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\overrightarrow{\phi}(x, y) = (y, x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Como a matriz A que representa $\overrightarrow{\phi}$ em relação à base canónica é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

temos $\det A = -1$, pelo que f é uma isometria inversa.

EXEMPLO 2.5.32. (**Forma normal de uma reflexão.**) Seja $\mathcal{H} = P+W$ um hiperplano de $\mathcal{E}$. Já vimos que, dado um ponto $X = P + w + v$, com $w \in W$ e $v \in W^\perp$, se tem $R_\mathcal{H}(X) = P + w - v$.

Por outro lado, pela demonstração da Proposição 2.5.23 sabemos que a aplicação ortogonal $\overrightarrow{\phi} : V \to V$ associada a $R_\mathcal{H}$ é tal que, dado um vector $u \in V$, que se escreve como $u = w + v$ com $w \in W$ e $v \in W^\perp$, nos dá

$$\overrightarrow{\phi}(u) = \overrightarrow{\phi}(w + v) = w - v.$$

Escolhendo uma base ortonormada $B = (e_1, \ldots, e_n)$ em V tal que

$$\mathcal{L}\{e_1, \ldots, e_{n-1}\} = W \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{e_n\} = W^\perp,$$

a representação matricial de $\overrightarrow{\phi}$ em relação à base B é

$$M(\overrightarrow{\phi}; B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Conclui-se assim que $\det \overrightarrow{\phi} = -1$, pelo que uma reflexão num hiperplano é uma isometria inversa.

Como, pela Proposição 1.3.3, a aplicação ortogonal associada a uma composição de isometrias é a composicão das aplicações ortogonais associadas a cada uma das isometrias temos imediatamente o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 2.5.33. *A composição de isometrias directas é uma isometria directa.*

A composição de um número par de isometrias inversas é uma isometria directa.

A composição de um número ímpar de isometrias inversas é uma isometria inversa.

A aplicação inversa de uma isometria directa é uma isometria directa.

A aplicação inversa de uma isometria inversa é uma isometria inversa.

COROLÁRIO 2.5.34. *O conjunto de todas as isometrias directas é um subgrupo de* $\mathrm{Iso}(\mathcal{E})$.

EXEMPLO 2.5.35. Como uma translação é uma isometria directa e uma reflexão num hiperplano é uma isometria inversa, conclui-se que as reflexões com deslize são isometrias inversas.

NOTA 2.5.36. (Ângulos geométricos e isometrias.) Dados três pontos não colineares $P, Q, R \in \mathcal{E}$, o **ângulo geométrico** $\angle(QPR)$, de vértice P definido por Q e R, é a união da semirecta com origem em P a passar por Q com a semirecta com origem em P a passar por R. A **medida**, $\measuredangle(QPR)$, **do ângulo geométrico** $\angle(QPR)$ é definida com sendo o ângulo

$$\measuredangle(QPR) := \measuredangle(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}).$$

É fácil verificar que uma isometria preserva as medidas dos ângulos geométricos.

Com efeito, temos

$$\begin{aligned}\cos\left(\measuredangle\left(f(Q)f(P)f(R)\right)\right) &= \cos\left(\measuredangle\left(\overrightarrow{f(P)f(Q)}, \overrightarrow{f(P)f(R)}\right)\right)\\ &= \cos\left(\measuredangle\left(\overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{PQ}), \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{PR})\right)\right) = \frac{\langle \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{PQ}), \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{PR})\rangle}{\|\overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{PQ})\|\|\overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{PR})\|}\\ &= \frac{\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\rangle}{\|\overrightarrow{PQ}\|\|\overrightarrow{PR}\|} = \cos\left(\measuredangle\left(QPR\right)\right),\end{aligned}$$

onde $\overrightarrow{\phi} : V \to V$ é a aplicação ortogonal associada a f.

2.6. Isometrias de $\mathbb{R}^2$

Considerando em $\mathbb{R}^2$ a estrutura de espaço afim usual com a distância entre pontos definida pela norma dada pelo produto interno usual, vamos estudar as isometrias de $\mathbb{R}^2$. Em primeiro lugar vamos recordar algumas das proposições já estudadas agora restritas ao caso particular de $\mathbb{R}^2$.

PROPOSIÇÃO 2.6.1. *(ver Proposição 2.4.3) Em $\mathbb{R}^2$ um ponto fica univocamente determinado pelas distâncias a três pontos não colineares.*

PROPOSIÇÃO 2.6.2. *(ver Proposição 2.4.5) Em $\mathbb{R}^2$, dada uma recta l e um ponto $P \notin l$ existe um e um só ponto P' tal que l é a mediatriz do segmento de recta $[PP']$.*

PROPOSIÇÃO 2.6.3. *(ver Proposição 2.5.14) Qualquer isometria de $\mathbb{R}^2$ fica univocamente determinada pelas imagens de três pontos não colineares.*

PROPOSIÇÃO 2.6.4. *(ver Proposição 2.5.16) Sejam P_0, P_1, P_2 três pontos não colineares de $\mathbb{R}^2$ e Q_0, Q_1, Q_2 outros três pontos de $\mathbb{R}^2$ tais que*

$$d(P_i, P_j) = d(Q_i, Q_j),\ \forall i, j \in \{0, 1, 2\}.$$

Então existe uma e uma só isometria $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $g(P_i) = Q_i$, para todo o $i \in \{0, 1, 2\}$.

PROPOSIÇÃO 2.6.5. *(ver Proposições 2.5.9 e 2.5.21) Se uma isometria de $\mathbb{R}^2$ tem três pontos fixos não colineares então é a identidade.*

Se tiver dois pontos fixos P e Q então ou é a identidade ou é a reflexão na recta r definida por P e Q.

TEOREMA 2.6.6. *(ver Teorema 2.5.10) Qualquer isometria de $\mathbb{R}^2$ pode ser escrita como composição de uma, duas ou três reflexões.*

COROLÁRIO 2.6.7. *O grupo das isometrias de $\mathbb{R}^2$ é gerado pelas reflexões em rectas de $\mathbb{R}^2$.*

2.6.1. Alguns Exemplos de Isometrias. Vejamos alguns exemplos de isometrias de $\mathbb{R}^2$.

EXEMPLO 2.6.8. (**Translações.**) Seja v um vector de $\mathbb{R}^2$. A translação por meio de v é a aplicação $T_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_v(P) = P + v$, para todo o ponto P de $\mathbb{R}^2$ e é uma isometria directa.

Se $v = (a, b)$, tem-se

$$T_v(x, y) = (x + a, y + b), \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Em particular se $v \neq (0, 0)$ a translação T_v não tem pontos fixos.

EXEMPLO 2.6.9. (**Reflexão numa recta.**) A reflexão numa recta l (ver Definição 2.4.7) é uma isometria inversa. Por definição de reflexão, os pontos fixos de R_l são exactamente os pontos da recta l.

EXEMPLO 2.6.10. (**Reflexão com deslize.**) (ver Exemplo 2.5.6) Se $l := P + U$ é uma recta de $\mathbb{R}^2$ e v é um vector não nulo de U (isto é paralelo a l), então a reflexão com deslize ao longo da recta l por meio de v é a isometria $T_v \circ R_l$ (que, pela Proposição 2.5.8, é igual a $R_l \circ T_v$). A aplicação ortogonal associada a $T_v \circ R_l$ é a aplicação ortogonal associada a R_l, pelo que uma reflexão com deslize é uma isometria inversa. Uma reflexão com deslize não tem pontos fixos.

EXEMPLO 2.6.11. (**Rotação de centro** C e **ângulo** θ.) Consideremos a aplicação ortogonal $\overrightarrow{\phi}_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, cuja matriz em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ é

$$M(\overrightarrow{\phi}_\theta;\ b.c.) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

com $\theta \in [0, 2\pi[$, ou seja $\overrightarrow{\phi}_\theta$ é a rotação de centro em $(0, 0)$ e ângulo θ.

Dado um ponto C definimos uma aplicação $\rho_{C,\theta} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por

$$\rho_{C,\theta}(P) = C + \overrightarrow{\phi}_\theta(\overrightarrow{CP}),\ \forall P \in \mathbb{R}^2.$$

Verifica-se facilmente que $\rho_{C,\theta}$ é uma isometria directa pois é uma aplicação afim cuja aplicação linear associada é ortogonal (ver Proposição 2.5.27) com determinante 1. A esta isometria dá-se o nome de **rotação de centro C e ângulo θ.**

Note que uma rotação $\rho_{C,\pi}$ é exactamente a meia-volta de centro em C pois, para todo o vector $v \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\rho_{C,\pi}(P) = C - \overrightarrow{CP}.$$

Uma rotação $\rho_{C,\theta} \neq id_{\mathbb{R}^2}$ tem um único ponto fixo: o ponto C. Com efeito, se $P = C + v$, com $v \neq 0$, fosse um outro ponto fixo de $\rho_{C,\theta}$, teríamos

$$P = C + v = \rho_{C,\theta}(P) = C + \overrightarrow{\phi}_\theta(v),$$

pelo que $\overrightarrow{\phi}_\theta(v) = v$ e então v seria um vector próprio de $\overrightarrow{\phi}_\theta$ associado ao valor próprio 1. No entanto, verifica-se facilmente pela definição de $\overrightarrow{\phi}_\theta$ que, se $\theta \neq 0$, esta aplicação não tem 1 como valor próprio.

Proposição 2.6.12. *Se $\rho_{C,\alpha}$ e $\rho_{C,\beta}$ são duas rotações de centro C então $\rho_{C,\alpha} \circ \rho_{C,\beta}$ é a rotação de centro em C e ângulo γ, onde $\gamma \in [0, 2\pi[$ é tal que*

$$\gamma \equiv \alpha + \beta \pmod{2\pi}.$$

A isometria inversa de $\rho_{C,\theta}$ é a rotação $\rho_{C,2\pi-\theta}$.

Demonstração: Por definição de rotação temos

$$\begin{aligned}(\rho_{C,\alpha} \circ \rho_{C,\beta})\,(C + v) &= \rho_{C,\alpha}(C + \overrightarrow{\phi}_\beta(v)) = C + \overrightarrow{\phi}_\alpha(\overrightarrow{\phi}_\beta(v)) \\ &= C + (\overrightarrow{\phi}_\alpha \circ \overrightarrow{\phi}_\beta)(v),\end{aligned}$$

onde $\overrightarrow{\phi}_\alpha$ e $\overrightarrow{\phi}_\beta$ são as aplicações ortogonais associadas a $\rho_{C,\alpha}$ e $\rho_{C,\beta}$ respectivamente. Como as representações matriciais destas aplicações em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ são dadas pela matrizes

$$M(\overrightarrow{\phi}_\alpha;\ b.c.) := \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M(\overrightarrow{\phi}_\beta;\ b.c.) = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

e

$$M(\overrightarrow{\phi}_\alpha \circ \overrightarrow{\phi}_\beta;\ b.c.) = M(\overrightarrow{\phi}_\alpha; b.c.)M(\overrightarrow{\phi}_\beta; b.c.),$$

temos

$$M(\overrightarrow{\phi}_\alpha \circ \overrightarrow{\phi}_\beta;\, b.c.) = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}, \tag{2.6.1}$$

pelo que $\rho_{C,\alpha} \circ \rho_{C,\beta} = \rho_{C,\gamma}$, com

$$\gamma = \begin{cases} \alpha+\beta \quad se \quad \alpha+\beta < 2\pi \\ \alpha+\beta-2\pi \quad se \quad \alpha+\beta \geq 2\pi \end{cases}.$$

Em particular, como a identidade $id_{\mathbb{R}^2}$ pode ser vista como a rotação de centro C e ângulo 0, a isometria inversa da rotação $\rho_{C,\theta}$ é a rotação de centro em C e ângulo $2\pi - \theta$. □

2.6.2. Classificação. Vamos agora caracterizar as isometrias de $\mathbb{R}^2$. Para tal precisamos dos seguintes resultados auxiliares.

Proposição 2.6.13. *Se uma isometria f de $\mathbb{R}^2$ tem um único ponto fixo C, então f é uma rotação de centro C.*

Demonstração: Suponhamos que f tem um único ponto fixo C e seja $\overrightarrow{\phi}$ a aplicação ortogonal associada a f. Por definição de $\overrightarrow{\phi}$ e porque $f(C) = C$ temos para todo o $Q = C + w$,

$$f(Q) = C + \overrightarrow{\phi}(w).$$

Como C é o único ponto fixo de f a aplicação $\overrightarrow{\phi}$ não pode ter 1 como valor próprio. Com efeito, se $\lambda = 1$ fosse valor próprio de $\overrightarrow{\phi}$ e $v \neq 0$ fosse um vector próprio associado ao valor próprio λ, teríamos

$$f(C+v) = C + \overrightarrow{\phi}(v) = C + v,$$

pelo que $C + v$ seria um ponto fixo de f diferente de C.

Pela classificação das aplicações ortogonais de $\mathbb{R}^2$ (ver Secção C.3 do Apêndice C), concluímos que se $\overrightarrow{\phi}$ não tem 1 como valor próprio então $\overrightarrow{\phi} = \overrightarrow{\phi}_\theta$ para algum $\theta \in [0, 2\pi[$. Assim, para qualquer $X \in \mathcal{E}$, temos

$$f(X) = f(C + \overrightarrow{CX}) = f(C) + \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{CX}) = C + \overrightarrow{\phi}_\theta(\overrightarrow{CX}),$$

pelo que f é necessariamente uma rotação de centro no ponto fixo C. □

Corolário 2.6.14. *Se l e m são duas rectas distintas de $\mathbb{R}^2$ concorrentes num ponto P, então $R_l \circ R_m$ é uma rotação de centro P.*

Demonstração: Suponhamos que C é ponto fixo de $R_l \circ R_m$, isto é que

$$(R_l \circ R_m)(C) = C.$$

Então, como $R_l \circ R_l = id_{\mathbb{R}^2}$, temos

$$R_m(C) = R_l(C).$$

Se $R_l(C) \neq C$ também $R_m(C) \neq C$, pelo que, por definição de reflexão, teríamos que as rectas (distintas) m e l seriam ambas as mediatrizes do segmento de recta entre C e $R_l(C) = R_m(C)$, o que é absurdo.

Se $R_l(C) = C$, então também $R_m(C) = C$ pelo que, por definição de reflexão, concluímos que $C \in l$ e $C \in m$, ou seja $C = P = l \cap m$.

Conclui-se assim que P é o único ponto fixo de $R_l \circ R_m$ pelo que a isometria $R_l \circ R_m$ é uma rotação de centro P (ver Proposição 2.6.13). □

PROPOSIÇÃO 2.6.15. *Seja $f \neq id_{\mathbb{R}^2}$ uma rotação de $\mathbb{R}^2$ de centro P e seja m uma recta que passa em P. Então*

(i) existe uma recta l que passa P tal que $f = R_l \circ R_m$;
(ii) existe uma recta l' que passa em P tal que $f = R_m \circ R_{l'}$.

Demonstração: (i) Seja S um ponto de m tal que $S \neq P$. Como f tem P como único ponto fixo, temos $f(S) \neq S$. Seja l a mediatriz do segmento de recta $[Sf(S)]$ (ver Figura 2.13). Como f é uma isometria e $f(P) = P$, temos

$$d(P, S) = d(P, f(S)),$$

pelo que $P \in l$, por definição de mediatriz.

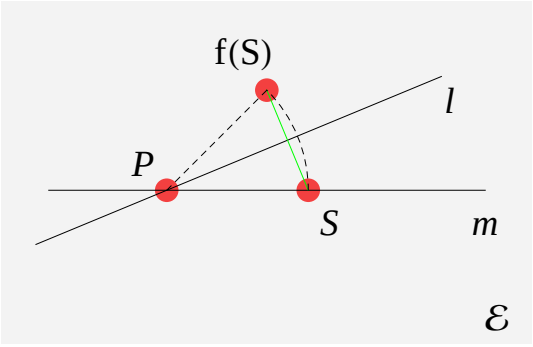

FIGURA 2.13. $f = R_l \circ R_m$.

Então, considerando a reflexão R_l na recta l, temos

$$R_l(S) = f(S), \quad R_l(f(S)) = S \quad \text{e} \quad R_l(P) = P.$$

Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a isometria $h := R_l \circ f$. Como

$$h(P) = R_l(f(P)) = P \quad \text{e} \quad h(S) = R_l(f(S)) = S,$$

temos que h fixa dois pontos distintos P e S, pelo que, pela Proposição 2.6.5 ou $h = id_{\mathbb{R}^2}$ ou h é a reflexão na recta que passa em P e S, ou seja na recta m.

Como $R_l \circ R_l = id_{\mathbb{R}^2}$ e $h = R_l \circ f$, temos

$$R_l \circ h = R_l \circ (R_l \circ f) = f.$$

Se h é a identidade temos $f = R_l$, contradizendo o facto de f ter um único ponto fixo. Conclui-se assim que $h = R_m$ e $f = R_l \circ R_m$.

(ii) Consideremos a isometria f^{-1}. Como f^{-1} é também uma rotação de centro P, podemos aplicar a parte (i) da proposição a f^{-1} e à recta m (ver Figura 2.14). Conclui-se assim que existe uma recta l' que passa em P tal que

$$f^{-1} = R_{l'} \circ R_m.$$

Então

$$f = (f^{-1})^{-1} = (R_{l'} \circ R_m)^{-1} = R_m^{-1} \circ R_{l'}^{-1} = R_m \circ R_{l'}$$

pois a aplicação inversa de uma reflexão é a própria reflexão.

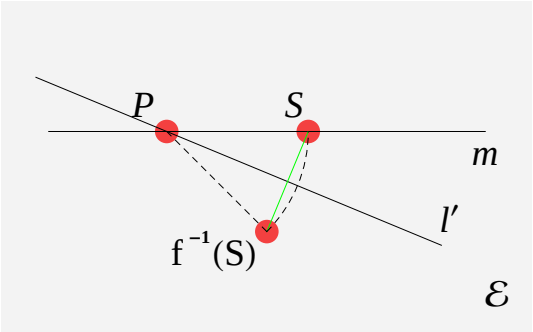

FIGURA 2.14. $f = R_m \circ R_{l'}$.

□

PROPOSIÇÃO 2.6.16. *Seja $f \neq id_{\mathbb{R}^2}$ uma rotação de $\mathbb{R}^2$ de centro em P e ângulo α que se escreve como $f = R_m \circ R_l$, onde R_m, R_l são reflexões em rectas m e l que passam por P. Então α é o ângulo orientado $\alpha = 2\measuredangle_{or}(l, m)$ (ver Anexo B.B.4)*

Demonstração: Seja X um ponto de l tal que $X \neq P$ e seja M o ponto médio do segmento de recta $[Xf(X)]$. Como

$$f(X) = R_m(R_l(X)) = R_m(X)$$

é o simétrico de X em relação a m, temos que o ponto M pertence à recta m e

$$\overrightarrow{Mf(X)} = \overrightarrow{XM}.$$

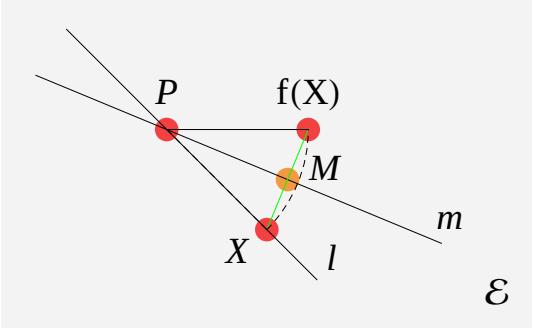

FIGURA 2.15. Ângulo de uma rotação.

Como os triângulos de vértices P, X, M e P, M, $f(X)$ são iguais, temos

$$\measuredangle_{or}(\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PM}) = \measuredangle_{or}(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{Pf(X)}).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\measuredangle_{or}(\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{Pf(X)}) &= \measuredangle_{or}(\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PM}) + \measuredangle_{or}(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{Pf(X)}) \pmod{2\pi} \\ &= 2\measuredangle_{or}(\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PM}) \pmod{2\pi}.\end{aligned}$$

Como pelas propriedades dos ângulos orientados de rectas temos

$$2\measuredangle_{or}(l, m) = 2\measuredangle_{or}(\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PM}) \pmod{2\pi}$$

(ver Proposição B.4.1 do Apêndice B), e, por definição, o ângulo de rotação α é exactamente $\alpha = \measuredangle_{or}(\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{Pf(X)})$, obtemos $\alpha = 2\measuredangle_{or}(l, m)$. □

PROPOSIÇÃO 2.6.17.

(i) Sejam l e m duas rectas paralelas de $\mathbb{R}^2$. Então a composição $R_m \circ R_l$ é a translação T_{2v} por meio do vector $2v$ ortogonal às rectas e tal que se $P \in l$ então $P + v \in m$.

(ii) Dada uma translação T_v e uma recta $l = P+\mathcal{L}\{u\}$ com u ortogonal a v existem rectas m e m' tais que

$$T_v = R_m \circ R_l = R_l \circ R_{m'},$$

onde

$$m = P + \frac{1}{2}v + \mathcal{L}\{u\} \quad e \quad m' = P - \frac{1}{2}v + \mathcal{L}\{u\}.$$

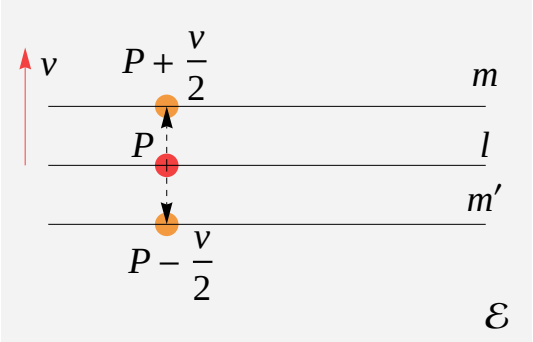

FIGURA 2.16. Uma translação como composição de duas reflexões em rectas paralelas.

Demonstração: (i) Sejam l e m duas rectas paralelas. Se $l = m$ então $R_m \circ R_l = id_{\mathbb{R}^2}$, pelo que $R_m \circ R_l$ é a translação pelo vector nulo (que é ortogonal a qualquer vector de $\mathbb{R}^2$).

Suponhamos que $l \neq m$ e que r é uma recta perpendicular a l e m. Sejam P e Q respectivamente os pontos de intersecção de r com l e m e considere-se o vector $v = \overrightarrow{PQ}$ (que é ortogonal ao subespaço vectorial associado a l e m). Temos

$$\begin{aligned}(R_m \circ R_l)(P) = R_m(P) &= R_m(Q + \overrightarrow{QP}) = Q - \overrightarrow{QP} \\ &= Q + \overrightarrow{PQ} = P + 2\overrightarrow{PQ} = P + 2v = T_{2v}(P),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(R_m \circ R_l)(Q) &= (R_m \circ R_l)(P + \overrightarrow{PQ}) = R_m(P - \overrightarrow{PQ}) \\ &= R_m(Q + \overrightarrow{QP} - \overrightarrow{PQ}) = R_m(Q - 2\overrightarrow{PQ}) = Q + 2\overrightarrow{PQ} \\ &= Q + 2v = T_{2v}(Q).\end{aligned}$$

Consideremos um ponto S tal que $S \in l$ e $S \neq P$, por exemplo $S = P + u$. Então

$$(R_m \circ R_l)(S) = R_m(S) = R_m(P+u) = R_m(Q + \overrightarrow{QP} + u) = Q + u - \overrightarrow{QP}$$
$$= P + \overrightarrow{PQ} + u + \overrightarrow{PQ} = S + 2\overrightarrow{PQ} = S + 2v = T_{2v}(S).$$

Como as imagens dos três pontos não colineares P,Q e S por meio de T_{2v} e por meio de $R_m \circ R_l$ são as mesmas e uma isometria de $\mathbb{R}^2$ fica univocamente determinada pelas imagens de três pontos não colineares, concluímos que

$$T_{2v} = R_m \circ R_l.$$

Para demonstrar (ii) sejam

$$l = P + \mathcal{L}\{u\} \quad \text{e} \quad m = P + \frac{1}{2}v + \mathcal{L}\{u\}$$

com $\langle u, v\rangle = 0$. Qualquer ponto $X \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito na forma

$$X = P + \lambda u + w,$$

com $w \in \mathcal{L}\{u\}^\perp$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então temos (ver Proposição 2.4.8)

$$R_l(X) = R_l(P + \lambda u + w) = P + \lambda u - w = P + \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}v + \lambda u - w,$$

pelo que

$$(R_m \circ R_l)(X) = R_m(R_l(X)) = R_m(P + \frac{1}{2}v + \lambda u - \frac{1}{2}v - w).$$

Como $v \in \mathcal{L}\{u\}^\perp$ e $P + \frac{1}{2}v \in m$, temos

$$R_m(P + \frac{1}{2}v + \lambda u - \frac{1}{2}v - w) = P + \frac{1}{2}v + \lambda u + \frac{1}{2}v + w$$
$$= P + \lambda u + w + v = X + v$$

e então $R_m \circ R_l = T_v$.

Analogamente se verifica que $R_l \circ R_{m'} = T_v$. □

Exemplo 2.6.18. Seja $v = (4, 2)$ e $P = (0, 1)$. Para decompormos a translação T_v como $T_v = R_l \circ R_m$ onde m é uma recta que passa por P, podemos usar a Proposição 2.6.17. Como $\mathcal{L}\{v\}^\perp = \mathcal{L}\{(-1, 2)\}$, basta-nos escolher

$$m = P + \mathcal{L}\{(-1, 2)\}, \quad \text{e} \quad l = P + \frac{1}{2}v + \mathcal{L}\{(-1, 2)\} = (2, 2) + \mathcal{L}\{(-1, 2)\}.$$

Para decompor T_v na forma $T_v = R_m \circ R_{l'}$ escolhemos

$$l' = P - \frac{1}{2}v + \mathcal{L}\{(-1, 2)\} = (-2, 0) + \mathcal{L}\{(-1, 2)\}.$$

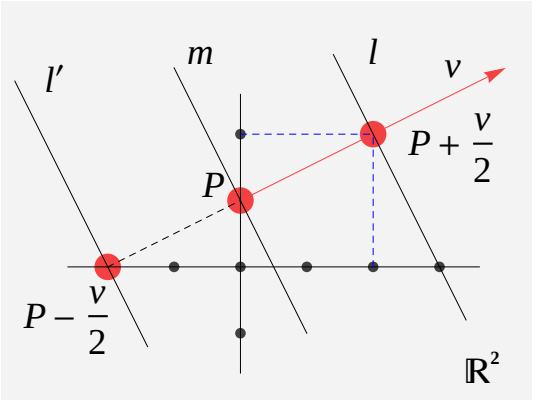

FIGURA 2.17. $T_{(4,2)} = R_l \circ R_m = R_m \circ R_{l'}$.

PROPOSIÇÃO 2.6.19. *Seja v um vector de $\mathbb{R}^2$ tal que $v \neq 0$ e $l := P + U$ uma recta de $\mathbb{R}^2$.*

1. *Se $v \in U^\perp$ então $T_v \circ R_l$ é a reflexão R_m na recta m paralela a l que passa por $P + \frac{1}{2}v$, i.e.*
$$m = P + \frac{v}{2} + U.$$
2. *Se $v \notin U^\perp$ então $T_v \circ R_l$ é uma reflexão com deslize ao longo da recta m.*

Demonstração: ***1.*** Suponhamos que $v \in U^\perp$. Então pela Proposição 2.6.17 - (ii) podemos escrever $T_v = R_m \circ R_l$ onde $m = P + \frac{1}{2}v + U$, pelo que

$$T_v \circ R_l = R_m \circ R_l \circ R_l = R_m.$$

2. Suponhamos que $v \notin U^\perp$. Então, como $V = U \oplus U^\perp$, podemos decompor $v = u + w$ com $u \in U$ e $w \in U^\perp$, onde $u \neq 0$. Assim, $T_v = T_u \circ T_w$ e

$$T_v \circ R_l = T_u \circ (T_w \circ R_l).$$

Como $w \in U^\perp$, pela primeira parte da demonstração, temos que $T_w \circ R_l$ é a reflexão na recta

$$m = P + \frac{1}{2}w + U = P + \frac{1}{2}(u + w) + U$$

e então, como $u \neq 0$ e $u \in U$, temos que

$$T_u \circ (T_w \circ R_l) = T_u \circ R_m$$

é uma reflexão com deslize ao longo de m.

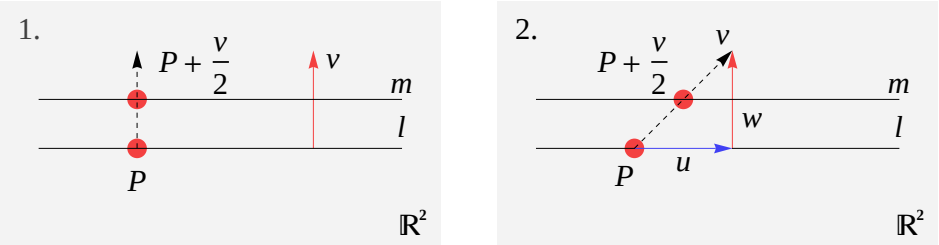

FIGURA 2.18. Composição $T_v \circ R_l$ de uma translação com uma reflexão.

Alternativamente, se v pertence ao subespaço vectorial U, então, por definição, $T_v \circ R_l$ é uma reflexão com deslize (ao longo da recta l por meio de v). Suponhamos então que $v \notin U$ e consideremos a decomposição $v = u + w$, com $u \in U$ e $w \in U^\perp$ onde $w \neq 0$ (pois $v \notin U$). Note-se que $u = 0$ se e só $v \in U^\perp$. Se m é a recta

$$m := P + \frac{1}{2}v + U,$$

podemos considerar a isometria $g := T_u \circ R_m$. Se $u = 0$ a aplicação g é a reflexão R_m e, se $u \neq 0$, é a reflexão com deslize ao longo de m por meio de u. Para demonstrar a proposição basta-nos mostrar que $T_v \circ R_l = g$. Para isso, pela Proposição 2.6.3, basta-nos ver que as duas isometrias coincidem em três pontos não colineares. Consideremos os pontos P, $S = P + u_1 \in l$ com $u_1 \in U$ e $Q := P + \frac{1}{2}v$. Como $v \notin U$, os pontos P, Q e S não são colineares. Além disso, temos

$$P = Q - \frac{1}{2}(u + w), \quad S = Q - \frac{1}{2}(u + w) + u_1 \quad \text{e} \quad Q \in m.$$

Uma vez que $P, S \in l$, temos

$$(T_v \circ R_l)(P) = P + v, \quad \text{e} \quad (T_v \circ R_l)(S) = S + v.$$

Como $Q = P + \frac{1}{2}(u+w)$ e u e w são ortogonais, então $R_l(Q) = P + \frac{1}{2}(u - w)$, pelo que

$$(T_v \circ R_l)(Q) = P + \frac{1}{2}(u - w) + v = P + u + \frac{1}{2}v = Q + u.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} g(P) &= (T_u \circ R_m)(P) = (T_u \circ R_m)(Q - \frac{1}{2}(u+w)) = T_u\left(Q - \frac{1}{2}(u-w)\right) \\ &= Q + \frac{1}{2}(u+w) = P + v, \\ g(Q) &= (T_u \circ R_m)(Q) = T_u(Q) = Q + u, \\ g(S) &= (T_u \circ R_m)(S) = (T_u \circ R_m)\left(Q + u_1 - \frac{1}{2}(u+w)\right) \\ &= T_u\left(Q + u_1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}w\right) = Q + u_1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}w = S + v. \end{aligned}$$

Conclui-se assim que $T_v \circ R_l = T_u \circ R_m$. □

TEOREMA 2.6.20. *(***Classificação das isometrias de $\mathbb{R}^2$.***) Uma isometria de $\mathbb{R}^2$ ou é a identidade, ou uma reflexão, ou uma rotação, ou uma reflexão com deslize, ou uma translação.*

Demonstração: Seja f uma isometria de $\mathbb{R}^2$.

Se f tem mais do que um ponto fixo então, pela Proposição 2.6.5 ou f é a identidade, ou é uma reflexão.

Se f tem um único ponto fixo então, pela Proposição 2.6.13, é uma rotação.

Suponhamos agora que f não tem pontos fixos. Seja S um ponto de $\mathbb{R}^2$. Como $f(S) \neq S$ podemos considerar a mediatriz l de $[Sf(S)]$. Então $(R_l \circ f)(S) = S$, pelo que $R_l \circ f$ tem pelo menos um ponto fixo S e então ou é a identidade, ou é uma reflexão R_m numa recta m que passa em S, ou é uma rotação $\rho_{S,\theta}$ de centro S.

Se fosse a identidade teríamos $f = R_l$ o que é impossível pois, por hipótese, f não tem pontos fixos.

Se $R_l \circ f = R_m$, então necessariamente m e l são rectas paralelas. Com efeito, se as duas rectas se intersectassem num ponto T, então pelo Corolário 2.6.14, a isometria $f = R_l \circ R_m$ seria uma rotação de centro T e T seria um ponto fixo de f. Assim as rectas m e l são necessariamente paralelas e então, pelo Proposição 2.6.17 - (i), temos que f é uma translação.

Se $R_l \circ f = \rho_{S,\theta}$, então pela Proposição 2.6.15 - (ii), se n é a recta paralela a l que passa por S, existe uma recta t que passa em S, tal que

$$\rho_{S,\theta} = R_n \circ R_t.$$

e então $f = R_l \circ R_n \circ R_t$. Como l e n são paralelas e $l \neq n$, temos, pela Proposição 2.6.17 - (i) que $R_l \circ R_n$ é uma translação T_v por meio de um

vector $v \neq 0$ ortogonal a n (e a l). Como n e t não são paralelas, pois têm um ponto em comum e são distintas, temos que v não é ortogonal a t. Assim, pela Proposição 2.6.19 - 2., temos que

$$f = (R_l \circ R_n) \circ R_t = T_v \circ R_t$$

é uma reflexão com deslize. □

Como consequência do Teorema 2.6.20 e dos factos estudados anteriormente, obtemos a seguinte chave para classificar as isometrias de $\mathbb{R}^2$.

COROLÁRIO 2.6.21. *Seja f uma isometria de $\mathbb{R}^2$ tal que $f \neq id_{\mathbb{R}^2}$. Então, se f é uma*

- *isometria directa sem pontos fixos $\Rightarrow$ f é uma translação;*
- *isometria directa com pontos fixos $\Rightarrow$ f é uma rotação;*
- *isometria inversa com pontos fixos $\Rightarrow$ f é uma reflexão;*
- *isometria inversa sem pontos fixos $\Rightarrow$ f é uma reflexão com deslize.*

EXEMPLO 2.6.22. Consideremos a isometria $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = (-y + 3, -x + 1)\,.$$

Como

$$f(x,y) = (x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -y+3 = x \\ -x+1 = y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y = 3 \\ x+y = 1 \end{cases}$$

conclui-se que f não tem pontos fixos.

A aplicação ortogonal associada a f é dada por $\overrightarrow{\phi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com

$$\overrightarrow{\phi}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

pelo que f é uma isometria inversa.

Conclui-se assim que f é uma reflexão com deslize, $f = T_w \circ R_l$, com w um vector director de l.

Para determinarmos w podemos notar que, pela Proposição 2.5.8, temos

$$T_w \circ R_l = R_l \circ T_w,$$

pelo que

$$f \circ f = T_w \circ R_l \circ T_w \circ R_l = T_w \circ R_l \circ R_l \circ T_w = T_{2w}.$$

Assim,

$$f^2(0,0) = f(3,1) = (2,-2) = T_{2w}(0,0) = (0,0) + 2w,$$

e então

$$w = \frac{1}{2}(2,-2) = (1,-1).$$

Como

$$f = T_w \circ R_l \Leftrightarrow T_{-w} \circ f = R_l,$$

temos que

$$R_l(x,y) = (-y+2, -x+2)\,.$$

A recta l pode ser determinada estudando os pontos fixos desta reflexão:

$$R_l(x,y) = (x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -y+2 = x \\ -x+2 = y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x+y = 2,$$

pelo que a recta l é definida pela equação $x+y=2$, ou seja,

$$l = (2,0) + \mathcal{L}\{(-1,1)\}.$$

Conclui-se assim que f é a reflexão com deslize ao longo da recta $(2,0) + \mathcal{L}\{(-1,1)\}$ por meio do vector $(1,-1)$.

Em **alternativa** podemos determinar o vector de deslize w e a recta l da seguinte forma. A isometria f pode escrever-se como $f = T_v \circ \overrightarrow{\phi}$ onde $v = (3,1)$ e $\overrightarrow{\phi}$ é a aplicação ortogonal dada por $\overrightarrow{\phi}(x,y) = (-y,-x)$. Como

$$\overrightarrow{\phi}(x,y) = (x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -y = x \\ -x = y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x+y = 0,$$

temos que $\overrightarrow{\phi}$ fixa todos os vectores de $\mathcal{L}\{(1,-1)\}$. Podemos então ver a aplicação linear $\overrightarrow{\phi}$ como sendo ela própria uma reflexão (na recta de equação $x+y=0$).

Como $(3,1) \notin \mathcal{L}\{(1,-1)\}^{\perp}$, temos, pela Proposição 2.6.19, que f é uma reflexão com deslize ao longo da recta

$$l := (0,0) + \frac{1}{2}(3,1) + \mathcal{L}\{(1,-1)\} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) + \mathcal{L}\{(1,-1)\}.$$

Para determinar o vector de deslize w, basta considerar a imagem do ponto $Q = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \in l$. Como

$$f(Q) = (T_w \circ R_l)\,(Q) = T_w(Q)$$

e $f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, obtemos $w = f(Q) - Q = (1,-1)$.

Conclui-se assim que f é a reflexão com deslize ao longo da recta

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) + \mathcal{L}\{(1,-1)\} = (2,0) + \mathcal{L}\{(1,-1)\}$$

por meio do vector $(1,-1)$.

EXEMPLO 2.6.23. Seja f a rotação $\rho_{P,3\pi/2}$ de centro $P=(0,2)$ e ângulo $\frac{3\pi}{2}$. Como a aplicação ortogonal associada a f é uma rotação $\overrightarrow{\phi}_{3\pi/2}$ de centro $(0,0)$ e ângulo $\frac{3\pi}{2}$, é definida, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$, pela matriz

$$M(\overrightarrow{\phi}_{3\pi/2};\ b.c.) = \begin{bmatrix} \cos\frac{3\pi}{2} & -\sin\frac{3\pi}{2} \\ \sin\frac{3\pi}{2} & \cos\frac{3\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e então

$$\overrightarrow{\phi}_{3\pi/2}(x,y) = (y,-x).$$

Assim, para $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ temos

$$\begin{aligned}\rho_{P,3\pi/2}(X) &= P + \overrightarrow{\phi}_{3\pi/2}(\overrightarrow{PX}) = (0,2) + \overrightarrow{\phi}_{3\pi/2}(x,y-2)\\ &= (0,2)+(y-2,-x) = (y-2,-x+2).\end{aligned}$$

Consideremos a recta

$$m = (3,2) + \mathcal{L}\{(1,0)\}.$$

Como m passa no ponto P temos, pela Proposição 2.6.15 - (i), que existe uma recta l que passa em P e tal que

$$R_l \circ R_m = \rho_{P,\frac{3\pi}{2}}.$$

Para determinar a recta l, podemos fazer como na demonstração da Proposição 2.6.15, segundo a qual l é a mediatriz do segmento de recta de extremidades S e $\rho_{P,\frac{3\pi}{2}}(S)$, onde S é um ponto qualquer de m diferente de P.

Tomando $S=(3,2)\in m$, temos

$$\rho_{P,\frac{3\pi}{2}}(S) = (0,-1).$$

Então l passa pelo ponto P e é perpendicular à recta definida por S e $\rho_{P,\frac{3\pi}{2}}(S)$, pelo que

$$l = P + \mathcal{L}\{(3,2)-(0,-1)\}^{\perp} = (0,2)+\mathcal{L}\{(3,3)\}^{\perp} = (0,2)+\mathcal{L}\{(1,-1)\}.$$

Note que

$$\measuredangle\left((1,0),(1,-1)\right) = \arccos\frac{\langle(1,0),(1,-1)\rangle}{\|(1,0)\|\,\|(1,-1)\|} = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

e que o ângulo orientado entre as duas rectas é

$$\measuredangle_{or}(m,l) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4},$$

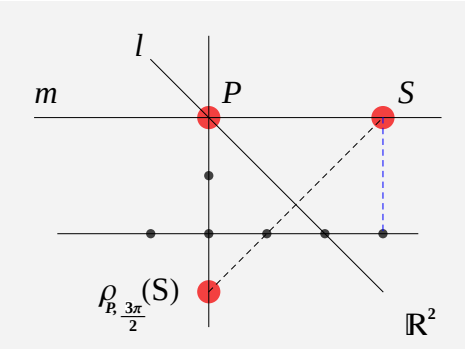

FIGURA 2.19. $\rho_{P,3\pi/2} = R_l \circ R_m$.

pelo que

$$2\measuredangle_{or}(m,l) = \frac{3\pi}{2}$$

é o ângulo da rotação.

Alternativamente, para escrever $\rho_{P,\frac{3\pi}{2}}$ na forma $R_l \circ R_m$, basta encontrar a recta l que passa em P e tal que $\measuredangle_{or}(m,l) = \frac{3\pi}{4}$. Como o vector $(1,0)$ é um vector director de m e

$$\overrightarrow{\phi}_{\frac{3\pi}{4}}(1,0) = \left(\cos\frac{3\pi}{4}, \sin\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1,1),$$

temos que

$$l = (0,2) + \mathcal{L}\{(-1,1)\}.$$

Vejamos agora mais algumas propriedades da composição de isometrias.

PROPOSIÇÃO 2.6.24. *A composição de duas rotações $\rho_{C,\alpha}$ e $\rho_{D,\beta}$ é uma translação se $\alpha + \beta \equiv 0 \pmod{2\pi}$ e é uma rotação se $\alpha + \beta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.*

Demonstração: Se $C = D$ o resultado é dado pela Proposição 2.6.12.

Suponhamos que $C \neq D$ e que l é a recta definida por C e D. Pelas Proposições 2.6.15 e 2.6.16 existe uma recta n que passa em D e tal que

$$\rho_{D,\beta} = R_l \circ R_n,$$

com $2\measuredangle_{or}(n,l) = \beta$. Da mesma forma, existe uma recta m que passa em C tal que

$$\rho_{C,\alpha} = R_m \circ R_l,$$

com $2\measuredangle_{or}(l,m) = \alpha$. Então

$$2\measuredangle_{or}(n,m) = 2\measuredangle_{or}(n,l) + 2\measuredangle_{or}(l,m) \pmod{2\pi} = \alpha + \beta \pmod{2\pi},$$

pelo que, em particular, n e m são paralelas se e só se $\alpha + \beta \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Assim,

$$f := \rho_{C,\alpha} \circ \rho_{D,\beta} = R_m \circ R_l \circ R_l \circ R_n = R_m \circ R_n.$$

Se as rectas n e m forem concorrentes num ponto P temos, pela Proposição 2.6.16, que f é uma rotação de centro em P e ângulo $\theta = 2\measuredangle_{or}(n, m)$. Se as rectas n e m forem paralelas temos, pela Proposição 2.6.17, que f é uma translação (ver Figura 2.20).

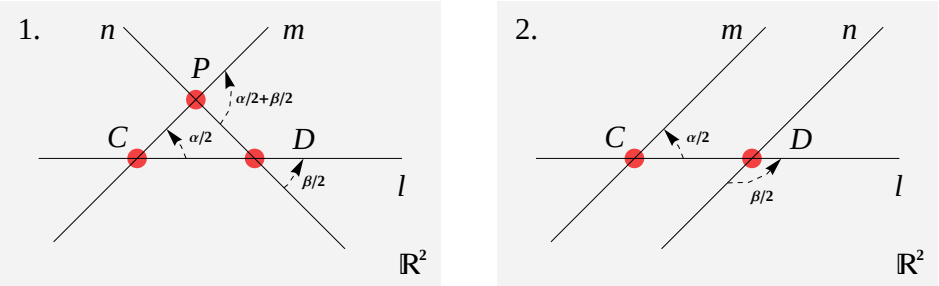

FIGURA 2.20. Composição de duas rotações de centros diferentes.

Alternativamente, podemos demonstrar este resultado da seguinte forma. Como $\rho_{C,\alpha} \circ \rho_{D,\beta}$ é uma isometria directa temos que ou f é uma translação ou é uma rotação. Como as aplicações ortogonais associadas a $\rho_{C,\alpha}$ e $\rho_{D,\beta}$ são as rotações $\overrightarrow{\phi}_\alpha$ e $\overrightarrow{\phi}_\beta$ de centro em $(0, 0)$ e ângulos α e β respectivamente, temos por (2.6.1) que a aplicação ortogonal associada a f é a aplicação $\overrightarrow{\phi}_\gamma$ com $\gamma \in [0, 2\pi[$ tal que $\gamma \equiv \alpha + \beta \pmod{2\pi}$.

Se $\alpha + \beta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, temos que $\gamma \neq 0$ e que f é uma rotação de ângulo γ. Se $\alpha + \beta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, então a aplicação ortogonal associada a f é a aplicação identidade e então f é necessariamente uma translação. □

COROLÁRIO 2.6.25. *A composição de duas rotações $\rho_{C,\alpha}$ e $\rho_{D,\beta}$ com centros em pontos distintos e $\alpha + \beta \equiv 0 \pmod{2\pi}$ é uma translação não trivial pelo vector*

$$v := \rho_{C,\alpha}(D) - D.$$

Demonstração: Pela Proposição 2.6.24 já sabemos que $\rho_{C,\alpha} \circ \rho_{D,\beta}$ é uma translação pois $\alpha + \beta = 0 \pmod{2\pi}$. Como

$$T_v(D) = (\rho_{C,\alpha} \circ \rho_{D,\beta})(D) = \rho_{C,\alpha}(D) \neq D$$

(pois $C \neq D$ e o único ponto fixo de $\rho_{C,\alpha}$ é o ponto C), temos que o vector v da translação é

$$v = \rho_{C,\alpha}(D) - D \neq 0.$$

□

COROLÁRIO 2.6.26. *Um subgrupo G de Iso$(\mathbb{R}^2)$ que contenha duas rotações $\rho_{C,\alpha}$ e $\rho_{D,\beta}$ com centros em pontos distintos contém necessariamente uma translação não trivial.*

Demonstração: Como G é um subgrupo de Iso$(\mathbb{R}^2)$ e $\rho_{C,\alpha}, \rho_{D,\beta} \in G$, temos que, em particular

$$\rho_{C,\alpha} \circ \rho_{D,\beta} \in G, \quad \rho_{C,\alpha}^{-1} \circ \rho_{D,\beta}^{-1} \in G \quad e \quad \rho_{C,\alpha} \circ \rho_{D,\beta} \circ \rho_{C,\alpha}^{-1} \circ \rho_{D,\beta}^{-1} \in G.$$

Se $\alpha+\beta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, o Corolário 2.6.25 diz-nos que $\rho_{C,\alpha} \circ \rho_{D,\beta}$ é uma translação não trivial em G.

Se $\alpha + \beta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ então

$$\rho_{C,\alpha} \circ \rho_{D,\beta} \quad \text{e} \quad \rho_{C,\alpha}^{-1} \circ \rho_{D,\beta}^{-1}$$

são ambas rotações, de ângulos γ e $2\pi - \gamma$ respectivamente, onde $\gamma \in [0, 2\pi[$ é tal que $\gamma \equiv \alpha + \beta \pmod{2\pi}$. Conclui-se assim, pela Proposição 2.6.24, que

$$\rho_{C,\alpha} \circ \rho_{D,\beta} \circ \rho_{C,\alpha}^{-1} \circ \rho_{D,\beta}^{-1}$$

é uma translação em G. Além disso, esta translação é não trivial. Com efeito, se

$$\rho_{C,\alpha} \circ \rho_{D,\beta} \circ \rho_{C,\alpha}^{-1} \circ \rho_{D,\beta}^{-1} = id_{\mathbb{R}^2}$$

teríamos

$$\rho_{C,\alpha} \circ \rho_{D,\beta} = \rho_{D,\beta} \circ \rho_{C,\alpha}$$

e então

$$(\rho_{C,\alpha} \circ \rho_{D,\beta})(D) = (\rho_{D,\beta} \circ \rho_{C,\alpha})(D) \Leftrightarrow \rho_{C,\alpha}(D) = \rho_{D,\beta}(\rho_{C,\alpha}(D)),$$

pelo que $\rho_{C,\alpha}(D)$ seria um ponto fixo de $\rho_{D,\beta}$, ou seja,

$$\rho_{C,\alpha}(D) = D$$

e, consequentemente, $C = D$. □

Para concluir vamos enumerar algumas propriedades das isometrias de $\mathbb{R}^2$ que decorrem facilmente dos factos anteriormente estudados.

PROPOSIÇÃO 2.6.27.

(i) Se f é uma isometria tal que a aplicação ortogonal associada a f é a identidade, então f é uma translação.

(ii) Se f é uma isometria cuja aplicação ortogonal associada é uma rotação $\overrightarrow{\phi}_\theta$ de ângulo θ e centro em $(0,0)$ então f é uma rotação de centro nalgum ponto $D \in \mathbb{R}^2$ e ângulo θ.

(iii) O centro C de uma rotação f pertence à mediatriz de $[Xf(X)]$, para qualquer ponto $X \in \mathbb{R}^2$ tal que $X \neq C$.

(iv) Qualquer translação T_v pode ser escrita como $T_v = \rho_C \circ \rho_D$ onde ρ_C e ρ_D são meias-voltas de centros em pontos C e D tais que $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}v$. Além disso, um dos dois pontos C ou D pode ser escolhido arbitrariamente.

2.6.3. Alguns subgrupos do grupo das isometrias de $\mathbb{R}^2$. Vejamos agora alguns exemplos de subgrupos do grupo de isometrias de $\mathbb{R}^2$.

EXEMPLO 2.6.28. (**Subgrupo gerado por uma translação não trivial.**)

Seja $T_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma translação por meio de um vector $v \neq 0$. Então $T_v^{-1} = T_{-v}$ e o conjunto

$$\mathcal{T}_v = \{T_v^m : m \in \mathbb{Z}\} = \{T_{mv} : m \in \mathbb{Z}\},$$

onde, se $m < 0$, temos $T_v^m = T_{-v}^{|m|}$, é o menor subgrupo de $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ que contém T_v, ou seja é o subgrupo $\langle T_v \rangle$ gerado por T_v. Note que $\mathcal{T}_v$ é um conjunto infinito numerável.

EXEMPLO 2.6.29. (**Subgrupo gerado por uma reflexão.**) Dada uma reflexão R_l, como $R_l^{-1} = R_l$, temos que o conjunto $\{Id, R_l\}$ forma um subgrupo de $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ (o subgrupo $\langle R_l \rangle$ gerado pela reflexão R_l).

EXEMPLO 2.6.30. (**Subgrupo gerado por uma rotação.**) Seja $\rho_{C,\theta} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma rotação de centro C e ângulo θ. Então

$$\rho_{C,\theta}^n = \rho_{C,n\theta} \quad \text{e} \quad \rho_{C,\theta}^{-1} = \rho_{C,2\pi-\theta}.$$

Se o subgrupo cíclico $\langle \rho_{C,\theta} \rangle$ gerado por $\rho_{C,\theta}$ é finito, então existem $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $\rho_{C,\theta}^{m_1} = \rho_{C,\theta}^{m_2}$, pelo que existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\rho_{C,\theta}^n = id$.

Como $\rho_{C,\theta}^n = \rho_{C,n\theta}$, temos $n\theta = 2k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$ e então θ é um múltiplo racional de 2π. Reciprocamente, se θ é um múltiplo racional de 2π, o subgrupo cíclico gerado por $\rho_{C,\theta}$ é finito. Se θ não for um múltiplo racional de 2π, o subgrupo cíclico gerado por $\rho_{C,\theta}$ é infinito.

EXEMPLO 2.6.31. (**Subgrupo gerado por uma reflexão com deslize.**) Seja

$$g := T_v \circ R_m = R_m \circ T_v$$

uma reflexão com deslize ao longo de uma recta m por meio do vector v (paralelo a m). Então

$$g^{-1} = T_{-v} \circ R_m = R_m \circ T_{-v} \quad \text{e} \quad g^2 = g \circ g = (T_v \circ R_m) \circ (R_m \circ T_v) = T_{2v}.$$

Assim, o subgrupo gerado por g é infinito pois contém o subgrupo $\mathcal{T}_{2v}$ gerado por T_{2v}.

2.6.4. Subgrupos finitos de isometrias de $\mathbb{R}^2$. Suponhamos que G é um subgrupo finito do grupo de isometrias de $\mathbb{R}^2$. Sabemos já, pelos Exemplos 2.6.28 e 2.6.31, que G não contém nenhuma translação, nem nenhuma reflexão com deslize (pois qualquer uma destas isometrias gera um subgrupo infinito). Para além disso, pelo Exemplo 4.4.28, o subgrupo G só pode conter rotações em que os ângulos são múltiplos racionais de 2π.

Suponhamos que G contém rotações. Se $G \neq \{id_{\mathbb{R}^2}\}$, então G contém uma rotação não trivial, $\rho_{C,\alpha}$. Pelo Corolário 2.6.26, todas as outras rotações em G têm centro C. Seja então α, com $\alpha > 0$, o menor ângulo positivo tal que $\rho_{C,\alpha} \in G$ e seja $\rho_{C,\beta}$ uma outra rotação de G, com $\beta > \alpha$. Vê-se facilmente que β tem de ser um múltiplo inteiro de α, pelo que todas as rotações de G pertencem ao subgrupo cíclico gerado por $\rho_{C,\alpha}$. Com efeito, se β não é múltiplo de α então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$m\alpha < \beta < (m+1)\alpha,$$

pelo que $0 < \beta - m\alpha < \alpha$ e então

$$\rho_{C,\beta} \circ \left(\rho_{C,\alpha}^m\right)^{-1} = \rho_{C,\beta-m\alpha}$$

é um elemento de G que é uma rotação de um ângulo positivo menor que α, o que é impossível.

Em particular, um subgrupo finito de $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ que só contenha rotações é um grupo cíclico gerado por uma rotação.

Suponhamos agora que o subgrupo finito G contém pelo menos uma reflexão R e sejam $\rho, \ldots, \rho^n$ as diferentes rotações de G (onde n é o número de elementos de G que são rotações).

Como

$$\rho \circ R, \rho^2 \circ R, \ldots, \rho^n \circ R$$

são isometrias inversas e G não contém reflexões com deslize, conclui-se que estas isometrias são necessariamente reflexões. Assim, G contém pelo menos n reflexões.

Sejam $R_1, \ldots, R_m$ as reflexões de G (onde m, o número de elementos de G que são reflexões, satisfaz $m \geq n$). Como

$$R_1 \circ R_1, R_2 \circ R_1, \ldots, R_m \circ R_1$$

são isometrias directas e pertencem a G, são necessariamente rotações (pois G não contém reflexões). Assim,

$$\{R_1 \circ R_1, R_2 \circ R_1, \ldots, R_m \circ R_1\} = \{\rho, \ldots, \rho^n\}$$

e $m = n$.

Conclui-se que

$$G = \{\rho, \ldots, \rho^n, \rho \circ R, \rho^2 \circ R, \ldots, \rho^n \circ R\}$$

e então G é o grupo gerado por uma rotação e uma reflexão, ou seja um **grupo diedral**

$$G = D_{2n} := \langle \rho, R |\ \rho^n = id,\ R^2 = id,\ (\rho \circ R)^2 = id \rangle.$$

Note que as relações acima garantem que ρ tem ordem n, que R e $\rho \circ R$ têm ordem 2 e que, consequentemente, os elementos da forma $\rho^k \circ R$ com $k = 1, \ldots, n$, têm ordem 2 pois

$$(\rho \circ R)^2 = id \Rightarrow \rho \circ R \circ \rho = R$$

e então

$$\begin{aligned}(\rho^k \circ R)^2 &= \rho^k \circ R \circ \rho^k \circ R = \rho^{k-1} \circ (\rho \circ R \circ \rho) \circ \rho^{k-1} \circ R \\ &= \rho^{k-1} \circ R \circ \rho^{k-1} \circ R = (\rho^{k-1} \circ R)^2 = \cdots = (\rho \circ R)^2 = id.\end{aligned}$$

Mostrámos assim o seguinte resultado.

TEOREMA 2.6.32. *(***Teorema de Leonardo***) Qualquer subgrupo finito do grupo das isometrias de $\mathbb{R}^2$ ou é um grupo cíclico ou um grupo diedral.*

O nome Leonardo vem de Leonardo da Vinci, que estudou simetrias relacionadas com problemas de arquitectura.

2.7. Simetrias e congruências

DEFINIÇÃO 2.7.1. *Dado um subconjunto $A \neq \emptyset$ de um espaço afim euclidiano $\mathcal{E}$, uma isometria $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ diz-se uma* **simetria** *de A se $f(A) = A$.*

EXEMPLO 2.7.2. A reflexão na recta m de $\mathbb{R}^2$ de equação $y = 0$ é uma simetria do quadrado

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ -1 \leq x, y \leq 1\}.$$

PROPOSIÇÃO 2.7.3. *Dado um subconjunto não vazio A de um espaço afim euclidiano $\mathcal{E}$, o conjunto*

$$Sim(A) := \{f \in Iso(\mathcal{E}) : f \text{ é simetria de } A\}$$

é um subgrupo do grupo das isometrias de $\mathcal{E}$.

Demonstração: O conjunto $\mathrm{Sim}(A)$ é sempre não vazio pois a identidade é uma simetria de A. Além disso, se f e g são dois elementos de $\mathrm{Sim}(A)$ então $f \circ g$ e f^{-1} são isometrias e satisfazem

$$(f \circ g)(A) = f(g(A)) = f(A) = A \quad \text{e} \quad f^{-1}(A) = A,$$

pelo que $f \circ g \in \mathrm{Sim}(A)$ e $f^{-1} \in \mathrm{Sim}(A)$. □

EXEMPLO 2.7.4. Se $A = \mathcal{E}$ então $\mathrm{Sim}(A) = \mathrm{Iso}(\mathcal{E})$.

EXEMPLO 2.7.5. Se A é um **polígono**[1] de $\mathbb{R}^2$ com n vértices então tem no máximo $2n$ simetrias. Com efeito, sejam X_1 e X_2 dois vértices adjacentes do polígono. Uma simetria $f \in \mathrm{Sim}(A)$ leva X_1 num vértice de A (pois transforma arestas em arestas) e X_2 num dos dois vértices adjacentes de $f(X_1)$. Depois as imagens dos outros vértices ficam completamente determinadas.

Consequentemente, o grupo de simetrias de um polígono de $\mathbb{R}^2$ é um subgrupo finito de $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$, pelo que, pelo Teorema de Leonardo, ou é um grupo cíclico ou um grupo diedral.

EXEMPLO 2.7.6. Se A é um polígono regular com n lados o seu grupo de simetrias é o grupo diedral D_{2n}.

NOTA 2.7.7. Os grupos diedrais $D_2 = \langle R \mid R^2 = id \rangle$ e

$$D_4 = \langle \rho, R \mid \rho^2 = id,\ R^2 = id,\ (\rho \circ R)^2 = id \rangle$$

são também grupos de simetria de polígonos. Por exemplo D_2 é o subgrupo de simetrias de um triângulo equilátero e D_4 o de um rectângulo não quadrado.

Também os grupos cíclicos $C_n = \langle \rho \mid \rho^n = id \rangle$ gerados por uma rotação são grupos de simetria de polígonos de $\mathbb{R}^2$. Por exemplo, o grupo C_1 é o grupo de simetrias de um triângulo escaleno, C_2 o de um paralelogramo

[1] Um polígono é uma figura plana limitada por segmentos de recta (denominados **lados** ou **arestas**), onde cada um destes segmentos de recta intersecta exactamente dois outros segmentos nos seus extremos. Os pontos de intersecção de duas arestas denomiam-se **vértices**. Um polígono convexo diz-se **regular** se os seus lados tiverem o mesmo comprimento e todos os ângulos internos tiverem a mesma amplitude.

não losango e não rectângulo e C_3 o do polígono da Figura 2.21 - (I). Em geral, C_n é o grupo de simetrias de um polígono em que os lados alternados se obtêm de um polígono regular com n lados, escolhendo apropriadamente um quarto de cada lado (ver Figura 2.21 - (II)).

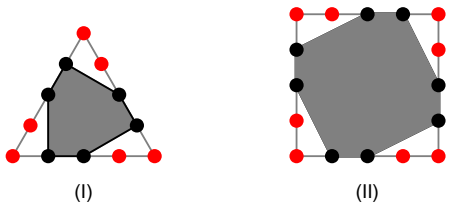

FIGURA 2.21. Exemplos de polígonos com simetria C_3 e C_4

DEFINIÇÃO 2.7.8. *Um ponto P diz-se um* **centro de simetria** *de um conjunto não vazio $A \subseteq \mathbb{R}^2$ se a meia-volta de centro P é uma simetria de A (ver Exemplo 2.5.3 - (iv)).*

DEFINIÇÃO 2.7.9. *Uma recta l diz-se um* **eixo de simetria** *de um conjunto não vazio $A \subseteq \mathbb{R}^2$ se a reflexão na recta l é uma simetria de A.*

EXEMPLO 2.7.10. Um círculo tem infinitos eixos de simetria.

EXEMPLO 2.7.11. Um polígono regular de n lados tem n eixos de simetria.

EXEMPLO 2.7.12. Se um polígono A tem exactamente n eixos de simetria então $\mathrm{Sim}(A) = D_{2n}$. Se n é par então A tem necessariamente um centro de simetria. Com efeito, o subgrupo de $\mathrm{Sim}(A)$ formado pelas rotações é gerado por uma rotação ρ tal que $\rho^n = id$ e então $\rho^{n/2}$ é uma meia-volta.

DEFINIÇÃO 2.7.13. *Dois subconjuntos A e B não vazios de $\mathcal{E}$ dizem-se* **congruentes** *se existir uma isometria f de $\mathcal{E}$ tal que $f(A) = B$.*

As seguintes propriedades obtêm-se facilmente.

PROPOSIÇÃO 2.7.14.

1) *Duas circunferências de $\mathbb{R}^2$ são congruentes se e só se tiverem o mesmo raio.*
2) *Dois segmentos de recta $[PQ]$ e $[RS]$ são congruentes se e só se*
$$d(P,Q) = d(R,S).$$
3) *Duas rectas em $\mathbb{R}^n$ são sempre congruentes.*

2.8. Descrição das isometrias de $\mathbb{R}^3$

Considerando em $\mathbb{R}^3$ a estrutura de espaço afim usual com a distância entre pontos definida pela norma dada pelo produto interno usual, vamos estudar as isometrias de $\mathbb{R}^3$. Em primeiro lugar, traduzindo algumas das proposições já estudadas para o caso particular de $\mathbb{R}^3$, temos os seguintes resultados.

PROPOSIÇÃO 2.8.1. *(ver Proposição 2.4.3) Em $\mathbb{R}^3$ um ponto fica univocamente determinado pelas distâncias a quatro pontos não coplanares.*

PROPOSIÇÃO 2.8.2. *(ver Proposição 2.4.5) Em $\mathbb{R}^3$, para todo o ponto P exterior a um plano $\mathcal{H}$, existe um e um só ponto P' tal que $\mathcal{H}$ é o plano mediador do segmento de recta $[PP']$.*

PROPOSIÇÃO 2.8.3. *(ver Proposição 2.5.14) Qualquer isometria de $\mathbb{R}^3$ fica univocamente determinada pelas imagens de quatro pontos não coplanares.*

PROPOSIÇÃO 2.8.4. *(ver Proposição 2.5.16) Sejam P_0, P_1, P_2, P_3 quatro pontos não coplanares de $\mathbf{R}^3$ e Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 outros quatro pontos de $\mathbb{R}^3$ tais que*

$$d(P_i, P_j) = d(Q_i, Q_j), \quad \forall i, j \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Então existe uma e uma só isometria $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$g(P_i) = Q_i, \quad \forall i \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

PROPOSIÇÃO 2.8.5. *(ver Proposições 2.5.9 e 2.5.21) Se uma isometria f de $\mathbb{R}^3$ tem quatro pontos fixos não coplanares então é a identidade. Se tiver três pontos fixos P, Q e R não colineares então ou é a identidade ou é a reflexão no plano $\mathcal{H}$ definido por P, Q e R.*

PROPOSIÇÃO 2.8.6. *(ver Proposição 2.5.10) Qualquer isometria f de $\mathbb{R}^3$ pode ser escrita como composição de uma, duas, três ou quatro reflexões.*

COROLÁRIO 2.8.7. *O grupo das isometrias de $\mathbb{R}^3$ é gerado pelo conjunto das reflexões em planos de $\mathbb{R}^3$.*

À semelhança do que se fez em $\mathbb{R}^2$, é possível mostrar o seguinte resultado.

TEOREMA 2.8.8. *(**Classificação das isometrias de** $\mathbb{R}^3$) Qualquer isometria de $\mathbb{R}^3$ é de um dos seguintes seis tipos:*

- **translação** *por meio de um vector v;*

- **reflexão** *num plano;*
- **reflexão com deslize** $T_v \circ R_{\mathcal{H}}$ *ao longo de um plano* $\mathcal{H} = P + W$ *por meio de um vector* $v \in W$*;*
- **rotação** $\rho_{l,\theta}$ *em torno de uma recta (eixo)* l *e ângulo* θ*;*
- **transformação helicoidal** *ou* **parafuso** $T_v \circ \rho_{l,\theta}$*, com* v *um vector* **paralelo** *a* l*;*
- **rotação com reflexão** $\rho_{l,\alpha} \circ R_{\mathcal{H}}$*, com* l *um* **eixo** *de* $\mathcal{H}$*.*

Antes de demonstrar este teorema vamos analisar cada um destes tipos de isometrias.

Translação: Seja v um vector de $\mathbb{R}^3$. A translação por meio de v é a aplicação $T_v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T_v(P) = P + v$, para todo o ponto P de $\mathbb{R}^3$ e é uma isometria directa (pois a aplicação ortogonal associada a T_v é a identidade). Em particular, se $v = (a, b, c)$, tem-se

$$T_v(x, y, z) = (x + a, y + b, y + c).$$

Se $v \neq (0, 0, 0)$ a translação T_v não tem pontos fixos.

Reflexão num plano: A reflexão num plano $\mathcal{H}$ dada pela Definição 2.4.7 é uma isometria inversa cujos pontos fixos são exactamente os pontos do plano $\mathcal{H}$.

Reflexão com deslize: Se $\mathcal{H} := P + W$ e $v \in W$ com $v \neq 0$, então a reflexão com deslize ao longo do plano $\mathcal{H}$ por meio de v é a isometria

$$T_v \circ R_{\mathcal{H}} = R_{\mathcal{H}} \circ T_v$$

(ver Proposição 2.5.8). A aplicação ortogonal associada a $T_v \circ R_{\mathcal{H}}$ é a aplicação ortogonal associada a $R_{\mathcal{H}}$, pelo que uma reflexão com deslize é uma isometria inversa. Estas isometrias não têm pontos fixos.

Rotação em torno de uma recta l e ângulo θ: Estas aplicações são obtidas por composição de duas reflexões em planos $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ não paralelos. Os pontos fixos de

$$\rho_{l,\theta} = R_{\mathcal{H}_2} \circ R_{\mathcal{H}_1}$$

são exactamente os pontos da recta $l = \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$. É preciso algum cuidado quando especificamos o ângulo da rotação. Com efeito, é necessário fixar um sentido na recta l (e que por isso é denominada **eixo de rotação**) e então $\rho_{l,\theta}$ designa a rotação de um ângulo $\theta \in [0, 2\pi[$ em torno deste eixo no sentido que satisfaz a regra da mão direita com o sentido escolhido em l.

Esta aplicação deixa invariante qualquer plano perpendicular a l. Restringindo a isometria a um destes planos $\mathcal{H}$, obtemos uma rotação de centro no ponto de intersecção de l e $\mathcal{H}$ e ângulo θ, novamente no sentido que satisfaz a regra da mão direita com o sentido de l (ver Figura 2.22). Considerando dois eixos l_1, l_2 de $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ contidos em $\mathcal{H}$, podemos definir o ângulo orientado entre os dois hiperplanos em relação ao eixo da rotação, como sendo

$$\measuredangle_{or}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) := \measuredangle_{or}(l_1, l_2),$$

onde $\measuredangle_{or}(l_1, l_2)$ é medido em $\mathcal{H}$ no sentido que satisfaz a regra da mão direita com o sentido do eixo de rotação. Note que este ângulo orientado é igual ao ângulo orientado entre as duas rectas m_1, m_2 desse plano definidas pelas interseções $m_i := \mathcal{H}_i \cap \mathcal{H}$ $(i = 0, 1)$. Assim, temos que o ângulo da rotação satisfaz

$$\theta = 2\measuredangle_{or}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2).$$

Como $\rho_{l,\theta}$ é a composição de duas reflexões é uma isometria directa.

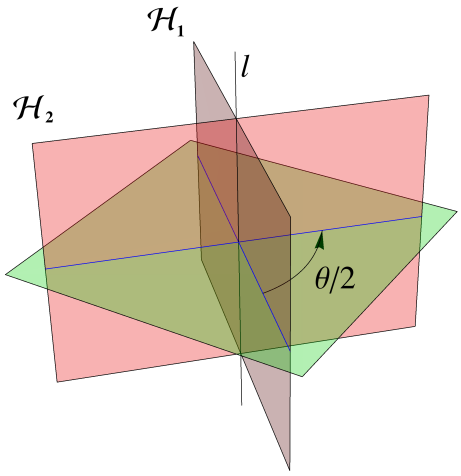

FIGURA 2.22. $\rho_{l,\theta} = R_{\mathcal{H}_2} \circ R_{\mathcal{H}_1}$.

EXEMPLO 2.8.9. Se l é o eixo dos zz orientado no sentido positivo, então a rotação em torno de l e ângulo θ (que é também uma aplicação linear) é definida em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ pela matriz

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.8.1}$$

No caso de uma rotação de ângulo θ em torno de um eixo l qualquer, podemos escolher uma base ortonormada (e_1, e_2, e_3) em que e_3 tem a direcção e o sentido de l e e_1, e_2 formam uma base ortonormada do espaço de direcções de um plano perpendicular a l em que e_2 é obtido a partir de e_1 por meio de uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ no sentido que satisfaz a regra da mão direita com e_3. Então a aplicação ortogonal associada à rotação de ângulo θ em torno de l é representada nessa base pela mesma matriz (2.8.1).

Transformação helicoidal ou parafuso: Estas aplicações são obtidas por composição de uma translação não trivial T_v com uma rotação em torno de uma recta l onde v é um vector paralelo a l. É fácil verificar que, nestas condições, a translação e a rotação comutam.

Uma transformação helicoidal não tem pontos fixos e é uma isometria directa.

Como a composta de duas reflexões em planos de $\mathbb{R}^3$ ou é uma translação, quando os planos são paralelos (ver Proposição 2.8.12), ou uma rotação em torno da recta de intersecção dos dois planos (ver Proposição 2.8.13), verifica-se que uma transformação helicoidal não se pode escrever como composição de duas reflexões. Assim, para a obter é necessário compor quatro reflexões.

Rotação com reflexão: Estas aplicações são obtidas por composição de uma rotação em torno de uma recta l com uma reflexão num plano $\mathcal{H}$ perpendicular a l. Também neste caso a rotação e a reflexão comutam. Esta isometria fixa um único ponto, o ponto de intersecção de l e $\mathcal{H}$ e é uma isometria inversa.

Exemplo 2.8.10. Uma inversão de centro num ponto $P \in \mathbb{R}^3$ (ver Exemplo 2.5.3 - (iv)) é um caso especial de uma rotação com reflexão que resulta da composição de uma rotação de ângulo π em torno de uma recta l com uma reflexão num plano $\mathcal{H}$ perpendicular a l. O centro da inversão é exactamente o ponto $l \cap \mathcal{H}$.

Exemplo 2.8.11. Seja $\mathcal{H}$ o plano de $\mathbb{R}^3$ definido pela equação $z = 0$ e $R_{\mathcal{H}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a reflexão em $\mathcal{H}$, ou seja a aplicação

$$R_{\mathcal{H}}(x, y, z) = (x, y, -z).$$

Se l é o eixo dos zz, a rotação de ângulo π em torno de l é dada por

$$\rho_{l,\pi}(x, y, x) = (-x, -y, z).$$

Assim, a rotação com reflexão

$$R_{\mathcal{H}} \circ \rho_{l,\pi} = \rho_{l,\pi} \circ R_{\mathcal{H}}$$

é a inversão de centro na origem,

$$(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z).$$

Vejamos agora as seguintes proposições auxiliares.

PROPOSIÇÃO 2.8.12.

(i) Em $\mathbb{R}^3$ a composição $R_{\mathcal{H}_1} \circ R_{\mathcal{H}_2}$ de duas reflexões em planos paralelos $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ é uma translação por meio de um vector $2v$ normal aos planos $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ e tal que, se $P \in \mathcal{H}_2$ então $P + v \in \mathcal{H}_1$.

(ii) Dada uma translação T_v e um plano $\mathcal{H} = P + U$ com $v \in U^{\perp}$, existem planos $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$T_v = R_{\mathcal{H}_2} \circ R_{\mathcal{H}} = R_{\mathcal{H}} \circ R_{\mathcal{H}_1},$$

onde

$$\mathcal{H}_1 = P - \frac{v}{2} + U \quad e \quad \mathcal{H}_2 = P + \frac{v}{2} + U.$$

Demonstração: Demonstração análoga à da Proposição 2.6.17. □

PROPOSIÇÃO 2.8.13. *Seja $f \neq id_{\mathbb{R}^3}$ uma rotação de $\mathbb{R}^3$ em torno de uma recta l e seja $\mathcal{H}_1$ um plano que contém l. Então*

i) existe um plano $\mathcal{H}_2$ que contém l e tal que $f = R_{\mathcal{H}_2} \circ R_{\mathcal{H}_1}$;

ii) existe um plano $\mathcal{H}_3$ que contém l e tal que $f = R_{\mathcal{H}_1} \circ R_{\mathcal{H}_3}$.

Demonstração: Demonstração análoga à da Proposição 2.6.15. □

PROPOSIÇÃO 2.8.14. *Seja v um vector de $\mathbb{R}^3$ tal que $v \neq 0$ e $\mathcal{H} := P + U$ um plano de $\mathbb{R}^3$.*

1. *Se $v \in U^{\perp}$ então $T_v \circ R_{\mathcal{H}}$ é a reflexão $R_{\widetilde{\mathcal{H}}}$ no plano $\widetilde{\mathcal{H}}$ paralelo a $\mathcal{H}$ que passa pelo ponto $P + \frac{1}{2}v$, i.e.*

$$\widetilde{\mathcal{H}} = P + \frac{v}{2} + U.$$

2. *Se $v \notin U^{\perp}$ então $T_v \circ R_{\mathcal{H}}$ é uma reflexão com deslize ao longo do plano $\widetilde{\mathcal{H}}$.*

Demonstração: ***1.*** Suponhamos que $v \in U^{\perp}$. Então, pela Proposição 2.8.12 - (ii), podemos escrever $T_v = R_{\widetilde{\mathcal{H}}} \circ R_{\mathcal{H}}$ onde $\widetilde{\mathcal{H}} = P + \frac{1}{2}v + U$, pelo que

$$T_v \circ R_{\mathcal{H}} = R_{\widetilde{\mathcal{H}}} \circ R_{\mathcal{H}} \circ R_{\mathcal{H}} = R_{\widetilde{H}}.$$

2. Suponhamos que $v \notin U^{\perp}$. Então, como $V = U \oplus U^{\perp}$, podemos decompor $v = u + w$ com $u \in U$ e $w \in U^{\perp}$, onde $u \neq 0$. Assim, $T_v = T_u \circ T_w$ e

$$T_v \circ R_{\mathcal{H}} = T_u \circ (T_w \circ R_{\mathcal{H}}).$$

Como $w \in U^{\perp}$, pela primeira parte da demonstração, temos que $T_w \circ R_{\mathcal{H}}$ é a reflexão no plano

$$\widetilde{\mathcal{H}} = P + \frac{1}{2}w + U = P + \frac{1}{2}(u + w) + U = P + \frac{v}{2} + U$$

e então, como $u \neq 0$ e $u \in U$, temos que

$$T_u \circ (T_w \circ R_{\mathcal{H}}) = T_u \circ R_{\widetilde{\mathcal{H}}}$$

é uma reflexão com deslize ao longo de $\widetilde{\mathcal{H}}$. □

NOTA 2.8.15. Nas condições da Proposição 2.8.14, se $f := R_{\mathcal{H}} \circ T_v$ então

$$f^{-1} = T_{-v} \circ R_{\mathcal{H}}.$$

Assim, se $v \in U^{\perp}$ então $T_{-v} \circ R_{\mathcal{H}}$ e consequentemente f, são a reflexão no plano

$$\widetilde{\mathcal{H}} = P - \frac{v}{2} + U.$$

Se $v \notin U^{\perp}$ então $T_{-v} \circ R_{\mathcal{H}}$ e f são reflexões com deslize no plano $\widetilde{\mathcal{H}}$ pois a inversa de uma reflexão com deslize é uma reflexão com deslize no mesmo plano.

Conclui-se assim que se $v \in U^{\perp}$ então $R_{\mathcal{H}} \circ T_v$ é a reflexão no plano $\widetilde{\mathcal{H}}$ e que, se $v \notin U^{\perp}$, então $R_{\mathcal{H}} \circ T_v$ é uma reflexão com deslize no plano $\widetilde{\mathcal{H}}$.

PROPOSIÇÃO 2.8.16. *Seja v um vector de $\mathbb{R}^3$ e $\rho_{l,\theta}$ uma rotação não trivial em torno da recta $l = P + U$.*

1. *Se $v \in U^{\perp}$ então $T_v \circ \rho_{l,\theta}$ é uma rotação de ângulo θ em torno de uma recta paralela à recta l.*
2. *Se $v \notin U^{\perp}$ então $T_v \circ \rho_{l,\theta}$ é uma transformação helicoidal ao longo de uma recta paralela a l.*

Demonstração: ***1.*** Se $v \in U^\perp$ seja $\mathcal{H}_2$ o plano perpendicular a v que contém a recta l. Então, pela Proposição 2.8.12 - (ii) existe um plano $\mathcal{H}_3$ paralelo a $\mathcal{H}_2$ tal que

$$T_v = R_{\mathcal{H}_3} \circ R_{\mathcal{H}_2}.$$

Por outro lado, pela Proposição 2.8.13 - (ii), como $l \subset \mathcal{H}_2$, podemos escolher outro plano $\mathcal{H}_1$ tal que $l \subset \mathcal{H}_1$ e

$$\rho_{l,\theta} = R_{\mathcal{H}_2} \circ R_{\mathcal{H}_1}.$$

Então

$$T_v \circ \rho_{l,\theta} = R_{\mathcal{H}_3} \circ R_{\mathcal{H}_2} \circ R_{\mathcal{H}_2} \circ R_{\mathcal{H}_1} = R_{\mathcal{H}_3} \circ R_{\mathcal{H}_1}$$

e, como os planos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_3$ são paralelos, temos

$$\measuredangle_{or}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) = \measuredangle_{or}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3)$$

(onde os ângulos são orientados em relação ao sentido do eixo l da rotação). Conclui-se assim que $T_v \circ \rho_{l,\theta}$ é uma rotação de ângulo θ em torno do eixo $l' = \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_3$ com a mesma direcção e sentido de l.

2. Se $v \notin U^\perp$, então, como $\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$, temos que $v = u + w$ com $u \in U$, $w \in U^\perp$ e $u \neq 0$. Então

$$T_v \circ \rho_{l,\theta} = T_u \circ T_w \circ \rho_{l,\theta}.$$

Como $w \in U^\perp$, temos, por 1. que $T_w \circ \rho_{l,\theta}$ é uma rotação em torno de uma recta l' paralela a l, e então

$$T_u \circ T_w \circ \rho_{l,\theta} = T_u \circ \rho_{l',\theta}$$

é uma transformação helicoidal. □

Nota 2.8.17. Nas condições da Proposição 2.8.16, se $f := \rho_{l,\theta} \circ T_v$ temos

$$f^{-1} = (\rho_{l,\theta} \circ T_v)^{-1} = T_{-v} \circ \rho_{l,2\pi-\theta},$$

pelo que, se $v \in U^\perp$ então $T_{-v} \circ \rho_{l,2\pi-\theta}$ é uma rotação de ângulo $2\pi - \theta$ em torno de um eixo paralelo a l e então f é uma rotação de ângulo θ em torno desse eixo. Se $v \notin U^\perp$, então $T_{-v} \circ \rho_{l,2\pi-\theta}$ é uma transformação helicoidal ao longo de uma recta paralela a l, pelo que $\rho_{l,\theta} \circ T_v$ é também uma transformação helicoidal ao longo dessa recta.

Proposição 2.8.18. *Seja $\rho_{l,\theta}$ uma rotação não trivial em torno de uma recta l e ρ_P a inversão num ponto $P \in l$. Então $\rho_P \circ \rho_{l,\theta}$ ou é uma reflexão ou uma rotação com reflexão.*

Demonstração: Escrevendo $l = P + U$, temos que $\mathcal{H} = P + U^{\perp}$ é o plano perpendicular a l que passa em P e então

$$\rho_P = \rho_{l,\pi} \circ R_{\mathcal{H}} = R_{\mathcal{H}} \circ \rho_{l,\pi}$$

(ver Exemplo 2.8.10). Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_3$ três planos que contêm a recta l (e que, consequentemente, são perpendiculares a $\mathcal{H}$) tais que

$$\rho_{l,\pi} = R_{\mathcal{H}_3} \circ R_{\mathcal{H}_2} \quad \text{e} \quad \rho_{l,\theta} = R_{\mathcal{H}_2} \circ R_{\mathcal{H}_1}.$$

Note que $\measuredangle(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3) = \frac{\pi}{2}$ e que $\measuredangle_{or}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) = \frac{\theta}{2}$, onde o ângulo é orientado no sentido da rotação. Então

$$\begin{aligned} \rho_P \circ \rho_{l,\theta} &= R_{\mathcal{H}} \circ \rho_{l,\pi} \circ \rho_{l,\theta} = R_{\mathcal{H}} \circ R_{\mathcal{H}_3} \circ R_{\mathcal{H}_2} \circ R_{\mathcal{H}_2} \circ R_{\mathcal{H}_1} \\ &= R_{\mathcal{H}} \circ R_{\mathcal{H}_3} \circ R_{\mathcal{H}_1} = R_{\mathcal{H}} \circ \rho_{l,\gamma}, \end{aligned}$$

onde $\gamma = \theta + \pi \pmod{2\pi}$. Conclui-se assim que $\rho_P \circ \rho_{l,\theta}$ é uma reflexão se $\theta = \pi$ e uma rotação com reflexão caso contrário. □

Nota 2.8.19. Igualmente, a isometria $f := \rho_{l,\theta} \circ \rho_P$ ou é uma reflexão ou uma rotação com reflexão. Com efeito, pela Proposição 2.8.18, temos que

$$f^{-1} = (\rho_{l,\theta} \circ \rho_P)^{-1} = \rho_P \circ \rho_{l,2\pi-\theta},$$

ou é uma reflexão ou uma rotação com reflexão, pelo que o mesmo se verifica para f.

Proposição 2.8.20. *Uma isometria directa com um ponto fixo P ou é a identidade ou uma rotação em torno de uma recta que passa em P.*

Demonstração: Se $f \neq id_{\mathbb{R}^3}$ é uma isometria directa então, pela Proposição 2.8.6, pode ser escrita como composição de duas ou quatro reflexões em planos de $\mathbb{R}^3$ que se intersectam. Por outro lado, como f tem um ponto fixo então, pelo Corolário 2.5.22, pode ser escrita como composição de 3 ou menos reflexões. Conclui-se assim que f pode ser escrita como composição de duas reflexões em planos de $\mathbb{R}^3$ que se intersectam, pelo que é uma rotação em torno da recta de intersecção dos dois planos. □

Proposição 2.8.21. *Uma isometria inversa com um ponto fixo ou é uma reflexão ou uma rotação com reflexão.*

Demonstração: Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma isometria inversa com um ponto fixo P então é a composta de uma ou três reflexões em planos de $\mathbb{R}^3$ que passam em P. Considerando a inversão ρ_P de centro P temos que $\rho_P \circ f$ é uma isometria directa que fixa o ponto P pelo que, pela Proposição 2.8.20, ou é a identidade ou é uma rotação $\rho_{l,\theta}$ em torno de uma recta l que passa em P. No primeiro caso temos $f = \rho_P$, pelo que é um caso particular de uma rotação com reflexão. No segundo caso temos

$$f = \rho_P \circ \rho_{l,\theta},$$

pelo que, pela Proposição 2.8.18, é uma reflexão ou uma rotação com reflexão. □

Proposição 2.8.22. *Uma isometria inversa sem pontos fixos é uma reflexão com deslize.*

Demonstração: Como f é uma isometria inversa sem pontos fixos temos que é a composição de três reflexões

$$f = R_{\mathcal{H}_3} \circ R_{\mathcal{H}_2} \circ R_{\mathcal{H}_1}$$

em planos $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ tais que

$$\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{H}_3 = \varnothing. \tag{2.8.2}$$

Além disso, os três planos são todos distintos pois f não tem pontos fixos. Com efeito, se $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_3$ então f seria trivialmente uma reflexão e, se $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_3$, então

$$f = R_{\mathcal{H}_1} \circ R_{\mathcal{H}_2} \circ R_{\mathcal{H}_1}$$

seria a reflexão no plano $R_{\mathcal{H}_1}(H_2)$.

Os três planos também não podem ser os três paralelos pois, nesse caso, teríamos

$$f = R_{\mathcal{H}_1} \circ R_{\mathcal{H}_2} \circ R_{\mathcal{H}_1} = T_v \circ R_{\mathcal{H}_1}$$

com v normal a $\mathcal{H}_1$, pelo que, pela Proposição 2.8.14 - 1. seria uma reflexão (o que é impossível pois, por hipótese, f não tem pontos fixos).

Conclui-se assim que dois dos três planos se intersectam numa recta l e que esta é paralela ao terceiro plano (pois, por (2.8.2), não o intersecta). Note que os três planos são necessariamente perpendiculares a um quarto plano (que tem l como eixo).

Se $\mathcal{H}_1$ é paralelo a $\mathcal{H}_2$ então, pela Proposição 2.8.12 - (i), temos que $f = R_{\mathcal{H}_3} \circ T_v$, onde v é um vector perpendicular a $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$. Então, como

vimos na Nota 2.8.15, conclui-se que f é uma reflexão com deslize pois v não é normal a $\mathcal{H}_3$ (os três planos não são todos paralelos).

Se $\mathcal{H}_1$ não é paralelo a $\mathcal{H}_2$, então $f = R_{\mathcal{H}_3} \circ \rho_{l,\alpha}$ onde $l = \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ e $\alpha = 2\measuredangle_{or}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \pmod{2\pi}$, onde o ângulo é orientado no sentido da rotação. Como a recta l é paralela a $\mathcal{H}_3$, podemos escrever

$$\rho_{l,\alpha} = R_{\widetilde{\mathcal{H}}_3} \circ R_{\mathcal{H}_4},$$

onde $\widetilde{\mathcal{H}}_3$ é o plano paralelo a $\mathcal{H}_3$ que contém a recta l e $\mathcal{H}_4$ é o plano que contém l e é tal que

$$\alpha = 2\measuredangle_{or}(\mathcal{H}_4, \widetilde{\mathcal{H}}_3) \pmod{2\pi},$$

onde o ângulo é orientado no sentido da rotação. Então

$$f = R_{\mathcal{H}_3} \circ \rho_{l,\alpha} = R_{\mathcal{H}_3} \circ R_{\widetilde{\mathcal{H}}_3} \circ R_{\mathcal{H}_4} = T_v \circ R_{\mathcal{H}_4}$$

onde v é um vector perpendicular a $\mathcal{H}_3$ e $\widetilde{\mathcal{H}}_3$. Assim, pela Proposição 2.8.14, como v não é normal a $\mathcal{H}_4$ (pois nesse caso teríamos $\mathcal{H}_4 = \mathcal{H}_3$ e, consequentemente, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$), temos que f é uma reflexão com deslize. □

PROPOSIÇÃO 2.8.23. *Uma isometria directa sem pontos fixos ou é uma translação ou é uma transformação helicoidal.*

Demonstração: Seja f uma isometria directa de $\mathbb{R}^3$ sem pontos fixos. Como f é uma isometria directa, pode ser escrita como composição de duas ou quatro reflexões. Se é a composição de duas reflexões em dois planos de $\mathbb{R}^3$ então, como não tem pontos fixos, os dois planos são necessariamente paralelos e f é uma translação.

Suponhamos que f é obtida por composição de quatro reflexões

$$f = R_{\mathcal{H}_4} \circ R_{\mathcal{H}_3} \circ R_{\mathcal{H}_2} \circ R_{\mathcal{H}_1}.$$

Sabemos já que as isometrias $R_{\mathcal{H}_4} \circ R_{\mathcal{H}_3}$ e $R_{\mathcal{H}_2} \circ R_{\mathcal{H}_1}$ ou são translações ou são rotações em torno de rectas de $\mathbb{R}^3$.

Se são ambas translações então f é uma translação.

Se uma é uma translação e a outra é uma rotação então, pela Proposição 2.8.16 e pela Nota 2.8.17, conclui-se que f ou é uma rotação ou é uma transformação helicoidal. Como, por hipótese, não tem pontos fixos é uma trasformação helicoidal.

Finalmente, temos de considerar o caso em que são ambas rotações $\rho_{l,\alpha}$ e $\rho_{m,\beta}$ em torno de rectas l e m. Como f não tem pontos fixos, as duas rectas não se intersectam pelo que ou são rectas paralelas ou enviesadas.

Se l e m são paralelas e $\mathcal{H}$ é o plano $\mathcal{H} := \langle l, m\rangle$ gerado por l e m, então, pela Proposição 2.8.13, existem planos $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ tais que

$$\rho_{l,\alpha} = R_{\mathcal{H}_1} \circ R_{\mathcal{H}} \quad \text{e} \quad \rho_{m,\beta} = R_{\mathcal{H}} \circ R_{\mathcal{H}_2}.$$

Assim,

$$f = \rho_{l,\alpha} \circ \rho_{m,\beta} = R_{\mathcal{H}_1} \circ R_{\mathcal{H}_2}.$$

Como f não tem pontos fixos temos que $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ são necessariamente paralelos e que f é uma translação.

Se $l = P + \mathcal{L}\{u_1\}$ e $m = Q + \mathcal{L}\{u_2\}$ são enviesadas, podemos considerar os planos paralelos

$$\widetilde{\mathcal{H}}_1 := P + \mathcal{L}\{u_1, u_2\} \quad \text{e} \quad \widetilde{\mathcal{H}}_2 := Q + \mathcal{L}\{u_1, u_2\}$$

que contêm l e m respectivamente. Então, pela Proposição 2.8.13, existem planos $\mathcal{H}_A$ e $\mathcal{H}_B$ com $l \subset \mathcal{H}_A$ e $m \subset \mathcal{H}_B$ tais que

$$\rho_{l,\alpha} = R_{\mathcal{H}_A} \circ R_{\widetilde{\mathcal{H}}_1} \quad \text{e} \quad \rho_{m,\beta} = R_{\widetilde{\mathcal{H}}_2} \circ R_{\mathcal{H}_B}$$

e então

$$\rho_{l,\alpha} \circ \rho_{m,\beta} = R_{\mathcal{H}_A} \circ R_{\widetilde{\mathcal{H}}_1} \circ R_{\widetilde{\mathcal{H}}_2} \circ R_{\mathcal{H}_B} = R_{\mathcal{H}_A} \circ T_v \circ R_{\mathcal{H}_B},$$

onde v é um vector perpendicular a $\widetilde{\mathcal{H}}_1$ e $\widetilde{\mathcal{H}}_2$. Pela Proposição 2.8.14, tem-se que $T_v \circ R_{\mathcal{H}_B}$ é uma reflexão ou uma reflexão com deslize.

Se $T_v \circ R_{\mathcal{H}_B}$ é uma reflexão, então $R_{\mathcal{H}_A} \circ T_v \circ R_{\mathcal{H}_B}$ é a composta de duas reflexões pelo que, como f não tem pontos fixos, é uma translação.

Se $T_v \circ R_{\mathcal{H}_B}$ é uma reflexão com deslize então podemos escrever

$$f = \rho_{l,\alpha} \circ \rho_{m,\beta} = R_{\mathcal{H}_A} \circ T_v \circ R_{\mathcal{H}_B} = R_{\mathcal{H}_A} \circ T_w \circ R_{\mathcal{H}'_B} = R_{\mathcal{H}_A} \circ R_{\mathcal{H}'_B} \circ T_w,$$

onde $\mathcal{H}'_B$ é uma plano paralelo a $\mathcal{H}_B$ e w é um vector no espaço das direcções de $\mathcal{H}_B$.

Como $R_{\mathcal{H}_A} \circ R_{\mathcal{H}'_B}$ é uma translação ou uma rotação, conclui-se que f ou é uma translação, ou a composta de uma translação com uma rotação pelo que, pela Nota 2.8.17 e porque f não tem pontos fixos, é uma transformação helicoidal. □

O Teorema 2.8.8 é então consequência das Proposições 2.8.20 a 2.8.23.

Deste resultado podemos obter a seguinte chave para classificar as isometrias de $\mathbb{R}^3$.

COROLÁRIO 2.8.24. *Seja f uma isometria de $\mathbb{R}^3$ tal que $f \neq id_{\mathbb{R}^3}$.*

- *Se f* **tem pontos fixos** *e o seu conjunto de pontos fixos é*
  - *um plano $\mathcal{H}$, então f é a reflexão em $\mathcal{H}$;*

  - *uma recta l, então f é uma rotação em torno de l;*
  - *um ponto P, então f é uma rotação com reflexão.*
- *Se f* **não tem pontos fixos** *e f é uma isometria*
  - *directa, então f é*
    - *uma translação (se a aplicação ortogonal associada a f é a identidade) ou*
    - *uma transformação helicoidal;*
  - *inversa, então f é uma reflexão com deslize.*

2.9. Exercícios

Nos exercícios que se seguem o produto interno entre dois vectores u e v de $\mathbb{R}^n$ é o produto interno usual e é indicado por $\langle u, v\rangle$. Consideramos também no espaço afim $\mathbb{R}^n$ a estrutura euclidiana usual (i.e. aquela para a qual o referencial canónico é um referencial ortonormado).

Exercício 2.9.1. Sejam U e W subespaços dum espaço vectorial euclidiano V (isto é um espaço vectorial real de dimensão finita no qual está fixado um produto interno). Mostre que

a) $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$; b) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

Exercício 2.9.2. Em $\mathbb{R}^2$ determine as rectas que passam pelo ponto $P = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ e que são perpendiculares às seguintes rectas:

a) $x + 2y + 5 = 0$;
b) recta que passa em $Q = (1, 1)$ e é paralela à recta de equacão $x+y+2 = 0$;
c) recta que passa em $R = (\pi, \pi)$ com a direcção do vector $v = (2, 2)$.

Exercício 2.9.3. Em $\mathbb{R}^2$ determine

a) se existir, um vector $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\langle v, (1, 1)\rangle = 1$ e $\|v\| = 1$.
b) $\measuredangle(u, v)$ onde $u = (\pi, \pi)$ e $v = (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

Exercício 2.9.4. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) Se $u, v \in \mathbb{R}^n$ e $\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle, \forall w \in \mathbb{R}^n$ então $u = v$.
b) Se $u, v \in \mathbb{R}^n$ e $\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle$ para algum $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, então $u = v$.
c) Se $u, v \in \mathbb{R}^2$, $\|u\| = \|v\|$ e $\measuredangle(u, w) = \measuredangle(v, w)$ para algum $w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ então $u = v$.

Exercício 2.9.5. Em $\mathbb{R}^4$ considere o plano

$$\mathcal{F} := (0, 1, 0, 3) + \mathcal{L}\{(1, 2, 0, 1), (2, 1, 3, 1)\}.$$

a) Calcule $\mathcal{L}\{(1,2,0,1),(2,1,3,1)\}^{\perp}$.
b) Determine um sistema de equações cartesianas que defina $\mathcal{F}$.
c) Indique uma recta r tal que o subespaço afim $\langle r, \mathcal{F}\rangle$ gerado por r e $\mathcal{F}$ seja $\mathbb{R}^4$.

EXERCÍCIO 2.9.6. Em $\mathbb{R}^3$, considere o ponto $P = (0,1,0)$ e o plano $\mathcal{F}$ definido por $y = 3$. Diga, justificando, se existe um referencial ortonormado $R = (O;(e_1,e_2,e_3))$ em relação ao qual $\mathcal{F}$ seja definido pela equação $x = 0$ e $P_R = (1,0,0)$.

EXERCÍCIO 2.9.7. Em $\mathbb{R}^3$ considere a recta $r = (0,0,0) + \mathcal{L}\{(0,0,1)\}$ e o plano $\mathcal{F}$ de equação $x + y + z = 3$. Determine, se existir,

a) um referencial ortonormado em relação ao qual o plano $\mathcal{F}$ seja definido pela equação $z = 0$;
b) um referencial ortonormado em relação ao qual o plano $\mathcal{F}$ seja definido pela equação $z = 0$, e a recta r seja definida pelas equações $x = y = 0$.

EXERCÍCIO 2.9.8. Considere os vectores $u = (0,1,-1)$ e $v = (2,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$ e calcule:

a) $\measuredangle(u,v)$;
b) $\measuredangle(r,s)$, onde r é a recta $(0,1,0) + \mathcal{L}\{u\}$ e s a recta $(1,1,0) + \mathcal{L}\{v\}$;
c) $\measuredangle(r,\mathcal{F})$ e $\measuredangle(s,\mathcal{F})$ onde $\mathcal{F}$ é o plano definido por $x - 2z = 9$;
d) $\measuredangle(\mathcal{G},\mathcal{F})$, onde $\mathcal{G}$ é o plano $(1,1,0) + \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,3,1)\}$.

EXERCÍCIO 2.9.9. Indique dois planos de $\mathbb{R}^3$ cujo ângulo seja $\frac{\pi}{4}$.

EXERCÍCIO 2.9.10. Em $\mathbb{R}^3$ determine as rectas que passam pelo ponto $(1,2,3)$ e fazem um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ com o plano de equação $x - 2y + z = 40$.

EXERCÍCIO 2.9.11. Seja $\mathcal{E}$ um espaço afim euclidiano de dimensão n. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) Se dois hiperplanos têm um mesmo eixo então são iguais.
b) Se dois hiperplanos têm um mesmo eixo então são paralelos.
c) Se duas rectas são eixos dum mesmo hiperplano então são paralelas.
d) Se $n = 4$, duas rectas perpendiculares ao mesmo plano são paralelas.
e) Duas rectas que façam o mesmo ângulo com um hiperplano são paralelas.
f) Se $\mathcal{H}$ é um hiperplano e r uma recta, então $\measuredangle(r,\mathcal{H}) = 0$ se e só se r e $\mathcal{H}$ são paralelos.
g) Se $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ são hiperplanos tais que $\measuredangle(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2) = \frac{\pi}{3}$, então $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ é um subespaço afim de codimensão 2.

EXERCÍCIO 2.9.12. Em $\mathbb{R}^2$ determine a mediatriz m do segmento de recta $[PQ]$, onde $P = (-\pi, \frac{1}{2})$ e $Q = (-1, 2)$ e o ponto simétrico do ponto $S = (0, 0)$ em relação a m.

EXERCÍCIO 2.9.13. Considere os pontos $P = (7, 8, 9, 0)$ e $Q = (3, 7, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^4$. Determine o hiperplano $\mathcal{H}$ mediador de $[PQ]$ e o simétrico do ponto $S = (1, 2, 3, 4)$ em relação a $\mathcal{H}$.

EXERCÍCIO 2.9.14. Determine a expressão da reflexão no hiperplano de $\mathbb{R}^5$ definido pela equação $x_1 - x_5 = 6$.

EXERCÍCIO 2.9.15. Em $\mathbb{R}^3$ considere as rectas $l := (0, 1, 0)+\mathcal{L}\{(1, 0, -1)\}$ e $m := (0, 2, 1) + \mathcal{L}\{(1, 0, 1)\}$. Determine

a) uma recta r perpendicular a l e m que intersecte l e m;
b) a distância de l a m.

EXERCÍCIO 2.9.16. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) Se em $\mathbb{R}^3$ a distância de uma recta a um plano é positiva, então a recta e o plano são paralelos.
b) Se em $\mathbb{R}^5$ a distância de uma recta a um plano é positiva, então a recta e o plano são paralelos.
c) Em $\mathbb{R}^3$, dadas duas rectas enviesadas, existe uma e uma só recta que as intersecta.

EXERCÍCIO 2.9.17. Seja $\mathcal{E}$ um espaço afim euclidiano. Mostre que um ponto C é o baricentro do sistema de massas pontuais $\{(P, \beta), (Q, (1 - \beta))\}$ (com $\beta \in \mathbb{R}$) se e só se

$$\beta\, d(R, P)^2+(1-\beta)\, d(R, Q)^2 = d(R, C)^2+\beta\, d(C, P)^2+(1-\beta)\, d(C, Q)^2,\ \forall R \in \mathcal{E}.$$

EXERCÍCIO 2.9.18. Seja $\mathcal{E}$ um espaço euclidiano e $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$ um hiperplano. Dados dois pontos $P, Q \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$, determine as diferentes possibilidades para o mínimo do conjunto

$$\{d(P, X) + d(X, Q) :\ X \in \mathcal{H}\}$$

e indique em que pontos são atingidas.

EXERCÍCIO 2.9.19. Seja $\mathcal{E}$ um espaço afim euclidiano. Mostre que a bola fechada de centro P e raio r

$$B_r(P) := \{X \in \mathcal{E} :\ d(X, P) \leq r\}$$

é um conjunto convexo.

EXERCÍCIO 2.9.20. Considere em $\mathbb{R}^2$ os pontos

$$P_0 = (0,0), \quad P_1 = (1,0), \quad P_2 = (0,2)$$

e $Q_0 = (0,-2), \quad Q_1 = (-2,-1), \quad Q_2 = (0,0)$. Diga se existe uma composição de reflexões $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(P_i) = Q_i$ para todo o $i \in \{0,1,2\}$.

EXERCÍCIO 2.9.21. Determine a isometria de $\mathbb{R}^2$ que transforma os pontos $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$ respectivamente nos pontos

$$\left(1/2, -\sqrt{3}/2\right), \quad (1,0) \quad \text{e} \quad \left((1-\sqrt{3})/2, (1-\sqrt{3})/2\right).$$

EXERCÍCIO 2.9.22. Considere em $\mathbb{R}^3$ os pontos

$$P_0 = (1,0,0), \quad P_1 = (0,0,1), \quad Q_0 = (0,-1,0) \quad \text{e} \quad Q_1 = (0,0,-1).$$

Determine, se existir, uma isometria $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(P_i) = Q_i$ para todo o $i \in \{0,1\}$.

EXERCÍCIO 2.9.23. Seja $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação afim que transforma os vértices do quadrado $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, respectivamente em $(1,1)$, $(3,1)$, $(3,3)$ e $(1,3)$.

a) A aplicação ψ é linear?
b) A aplicação ψ é uma isometria?
c) A aplicação ψ é única?
d) Determine ψ.

EXERCÍCIO 2.9.24. Seja $\mathcal{E}$ um espaço afim euclidiano de dimensão n. Mostre que se uma isometria fixa $n-1$ pontos independentes então ou f é uma reflexão ou é uma composição de duas reflexões.

EXERCÍCIO 2.9.25. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) Uma isometria de $\mathbb{R}^2$ transforma rectas paralelas em rectas paralelas.
b) A imagem de uma recta l de $\mathbb{R}^2$ por meio de uma isometria é uma recta paralela a l.

EXERCÍCIO 2.9.26. Determine a transformação ortogonal $\vec{\phi} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associada à isometria $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x,y,z) = \left(x+3, \frac{\sqrt{2}}{2}(y-z) - 3, \frac{\sqrt{2}}{2}(y+z) + 1\right).$$

EXERCÍCIO 2.9.27. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x,y,z) = (2+y, 3+x, z).$$

a) Mostre que f é uma isometria.
b) Determine, se existirem, os pontos fixos de f.
c) Se possível, decomponha f como composição de duas reflexões em hiperplanos.
d) Determine $f(r)$, onde r é a recta que passa pelos pontos $P = (2, 3, 0)$ e $Q = (5, 6, 1)$.

EXERCÍCIO 2.9.28. Seja V um espaço vectorial munido de um produto interno. Mostre que se uma aplicação $f : V \to V$ preserva o produto interno, i.e.,

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle, \ \ \forall u, v \in V,$$

então f é uma aplicação linear (e consequentemente uma isometria linear de V se considerarmos em V a sua estrutura afim canónica).

Sugestão: Considere $||f(\lambda u + v) - \lambda f(u) - f(v)||^2$.

EXERCÍCIO 2.9.29. Mostre que qualquer translação em $\mathbb{R}^2$ se pode escrever como composição de duas meias voltas.

EXERCÍCIO 2.9.30. Mostre que se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma reflexão com deslize numa recta m por meio de um vector v, então, dado qualquer ponto $P \in \mathbb{R}^2$, o ponto médio do segmento de recta $[Pf(P)]$ pertence a m.

EXERCÍCIO 2.9.31. Seja $\mathcal{E}$ um espaço euclidiano de dimensão n e $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ uma isometria. Mostre que, se existe um ponto $P \in \mathcal{E}$ tal que $f^2(P) = P$ e $f(P) \neq P$, então existem infinitos pontos em $\mathcal{E}$ nestas condições.

EXERCÍCIO 2.9.32. Se $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ é uma isometria e existe um ponto P tal que $f^3(P) = P$ e $f(P) \neq P$, então P, $f(P)$ e $f^2(P)$ são vértices de um triângulo equilátero.

EXERCÍCIO 2.9.33. Seja $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ uma isometria num espaço afim euclidiano $\mathcal{E}$ que deixa uma recta ℓ invariante. Mostre que se f tem um ponto fixo $P \notin \ell$ então f tem infinitos pontos fixos.

EXERCÍCIO 2.9.34. Seja $\mathcal{E}$ um espaço euclidiano e $g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ uma isometria. Diga, justificando, quais as translações T_v que comutam com g.

EXERCÍCIO 2.9.35. Seja $\mathcal{E}$ um espaço euclidiano e $f, g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ duas isometrias. Sabendo que f e g têm pontos fixos e que $f \circ g = g \circ f$, mostre que f e g têm pelo menos um ponto fixo comum.

Sugestão: Comece por mostrar que g deixa invariante o espaço afim formado pelos pontos fixos de f e considere um ponto fixo de g que não pertença esse espaço.

EXERCÍCIO 2.9.36. Seja $\mathcal{E}$ um espaço euclidiano associado a um espaço vectorial V e $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ uma isometria.

a) Mostre que se $u \in \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{id}_V)$ então $\langle u, v\rangle = 0$, $\forall v \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{id}_V)$. Conclua que
$$V = \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{id}_V) \oplus \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{id}_V).$$

b) Seja X_0 um ponto de $\mathcal{E}$. Mostre que existe $X \in \mathcal{E}$ e $v \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{id}_V)$ tal que
$$\overrightarrow{X_0 f(X_0)} = -(\vec{f} - \mathrm{id}_V)(\overrightarrow{X_0 X}) + v.$$
Conclua que X é um ponto fixo da isometria $g := T_{-v} \circ f$.
Sugestão: Escreva $X = X_0 + \overrightarrow{X_0 X}$.

c) Mostre que se $v \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{id}_V)$ e $g := T_{-v} \circ f$ então
$$f = T_v \circ g = g \circ T_v.$$

d) Mostre que f pode ser escrita de forma única como uma composição de duas isometrias que comutam
$$f = T_v \circ g = g \circ T_v,$$
onde T_v é uma translação ao longo de um vector $v \in V$ e g é uma isometria com pelo menos um ponto fixo.
Sugestão: Para mostrar unicidade, considere duas isometrias $g_1, g_2 : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ com pontos fixos P_1, P_2 respectivamente e dois vectores $v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{id}_V)$ tais que
$$f = T_{v_1} \circ g_1 = T_{v_2} \circ g_2.$$
Conclua que $v_2 - v_1 = (\vec{f} - \mathrm{id}_V)(\overrightarrow{P_1 P_2}) \in \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{id}_V)$ e, consequentemente, que $v_2 - v_1 = 0$.

EXERCÍCIO 2.9.37. Mostre que se $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ é uma translação então existe uma isometria inversa h tal que $f = h^2$.

EXERCÍCIO 2.9.38. Calcule o ângulo orientado $\measuredangle_{or}(u, v)$ de dois vectores $u, v \in \mathbb{R}^2$ nos seguintes casos:

a) $u = (1, 1)$ e $v = (-3, -3)$; b) $u = (1, 1)$ e $v = (1, 0)$;

c) $u = (1, 0)$ e $v = (1, 0)$; d) $u = (0, 1)$ e $v = (1, 0)$.

EXERCÍCIO 2.9.39. Considere em $\mathbb{R}^2$ a recta l que passa pelos pontos $P = (1, 1)$ e $Q = (2, 2)$, e a recta m definida pela equação $x = -2$. Calcule:

a) $\measuredangle(l, m)$; b) $\measuredangle_{or}(l, m)$; c) $\measuredangle_{or}(m, l)$.

EXERCÍCIO 2.9.40. Indique a aplicação ortogonal associada a

a) uma translação;
b) uma meia volta de centro num ponto P;
c) uma reflexão deslizante na recta $r = (1,1) + \mathcal{L}\{(1,2)\}$ por meio do vector $(-\pi, -2\pi)$.

EXERCÍCIO 2.9.41. Determine a expressão analítica da rotação em $\mathbb{R}^2$ de centro no ponto $(1,2)$ e ângulo $\pi/3$.

EXERCÍCIO 2.9.42. Determine uma base de vectores próprios da matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Mostre que a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por A é uma reflexão e indique a recta de reflexão.

EXERCÍCIO 2.9.43. Considere a isometria $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f = R_m \circ T_v \circ \rho_{(P,\frac{\pi}{2})}$$

onde $\rho_{(P,\frac{\pi}{2})}$ é a rotação de ângulo $\pi/2$ e centro no ponto $P = (-1,0)$, a aplicação T_v é a translação por meio do vector $v = (2,4)$ e R_m é a reflexão na recta m que passa por $(0,0)$ com a direcção do vector $(0,1)$.

a) Determine as expressões de f e f^{-1}.
b) Classifique a isometria f.
c) Sendo C a circunferência de raio 2 e centro em $(2,3)$, determine $f(C)$.
d) Determine, se existir, uma recta l tal que $f(l) = l$.

EXERCÍCIO 2.9.44. Indique, justificando, qual a linha poligonal de comprimento mínimo entre duas localidades A e B separadas por dois rios, sabendo que estes têm de ser atravessados por duas pontes perpendiculares às margens dos rios. Qual o seu comprimento?

Sugestão: Represente a margem do primeiro rio mais próxima de A por uma recta ℓ de $\mathbb{R}^2$ e a margem do segundo rio mais próxima de A por uma recta m. Se u_1 é o vector perpendicular a ℓ de comprimento igual à distância entre as margens do primeiro rio e u_2 é o vector perpendicular a m de comprimento igual à distância entre as margens do segundo rio, encontre o mínimo M do conjunto

$$\begin{aligned} M &:= \min\{d(A,X) + \|u_1\| + d(X+u_1, Y) + \|u_2\| + d(Y+u_2, B) : \ X \in \ell \text{ e } Y \in m\} \\ &= \|u_1\| + \|u_2\| + \min\{d(A,X) + d(X+u_1, Y) + d(Y+u_2, B) : \ X \in \ell \text{ e } Y \in m\} \\ &= \|u_1\| + \|u_2\| + \min\{d(A,X) + d(X, Y-u_1) + d(Y-u_1, B-u_1-u_2) : \ X \in \ell \text{ e } Y \in m\}. \end{aligned}$$

EXERCÍCIO 2.9.45. Considere as isometrias $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tais que

$$f(1,2) = (3,4) \quad \text{e} \quad f(3,4) = (1,2).$$

a) Diga, justificando, quantas isometrias satisfazem estas condições.
b) Classifique estas isometrias e determine as suas expressões analíticas.

EXERCÍCIO 2.9.46. Em $\mathbb{R}^2$ considere as rectas m_1, m_2, m_3, m_4 dadas por

$$m_1\colon\ y - x = 6, \quad m_2\colon\ y = 0, \quad m_3\colon\ y - x = 2 \quad \text{e} \quad m_4\colon\ x + y = 0.$$

Sem determinar explicitamente as reflexões R_{m_i} $(i = 1, \cdots, 4)$, classifique detalhadamente as isometrias

a) $R_{m_1} \circ R_{m_3}$ e $R_{m_2} \circ R_{m_3}$;
b) $R_{m_1} \circ R_{m_3} \circ R_{m_4}$ e $R_{m_1} \circ R_{m_3} \circ R_{m_2}$.

EXERCÍCIO 2.9.47. Sabendo que $(0,1)$ é o único ponto fixo de uma isometria $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = (\frac{1}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$,

a) determine a expressão de f;
b) escreva f como a composição de reflexões em rectas e confirme o resultado da alínea anterior.

EXERCÍCIO 2.9.48. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = (y + 1, x - 1)$$

e a reflexão R_m na recta m definida pela equação $y = x - 2$. Sem determinar explicitamente R_m classifique detalhadamente as isometrias f, $f \circ R_m$ e $T_v \circ f$ onde v é o vetor $v = (1,3)$.

EXERCÍCIO 2.9.49. Em $\mathbb{R}^2$, seja R_l a reflexão numa recta l. Mostre que, dada uma isometria f de $\mathbb{R}^2$ qualquer, $f \circ R_l \circ f^{-1}$ é a reflexão na recta $f(l)$.

EXERCÍCIO 2.9.50. Sendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a isometria definida por

$$f(x,y) = (y - 1, x + 1)$$

e R_l a reflexão na recta $l \subset \mathbb{R}^2$ definida por $x = 1$, classifique detalhadamente as isometrias f, $R_l \circ f$ e $f \circ R_l \circ f$.

EXERCÍCIO 2.9.51. Sejam s e l duas rectas de $\mathbb{R}^2$ tais que

$$(R_s \circ R_l)\,(x,y) = (x + 4, y - 2),$$

onde R_s e R_l são reflexões nas rectas s e l respectivamente.

a) Determine equações para as rectas s e l, sabendo que l passa na origem.

b) Indique os pontos fixos da isometria $R_m \circ (R_s \circ R_l)$, onde $m \subset \mathbb{R}^2$ é a recta de equação $2x - y = 0$.

EXERCÍCIO 2.9.52. Duas isometrias $f, g \in Iso(\mathbb{R}^2)$ dizem-se conjugadas se existir $h \in Iso(\mathbb{R}^2)$ tal que $h \circ f \circ h^{-1} = g$. Mostre que:

a) Duas reflexões quaisquer são sempre conjugadas.
b) Duas translações, T_u e T_v são conjugadas se e só se $\|u\| = \|v\|$.
c) Duas reflexões deslizantes $R_l \circ T_u$ e $R_m \circ T_v$ são conjugadas se e só se $\|u\| = \|v\|$.

EXERCÍCIO 2.9.53. Sejam $R_l, R_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ reflexões nas rectas l e m, sejam $\rho_{(P,\alpha)}, \rho_{(Q,\beta)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ duas rotações de centros P e Q e ângulos α e β respectivamente com $\alpha, \beta \neq 0$, e sejam $\rho_P, \rho_Q, \rho_R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ meia-voltas de centros P, Q e R. Prove que:

a) $R_l \circ R_m = R_m \circ R_l$ se e só se $l \perp m$ ou $l = m$;
b) $\rho_{(P,\alpha)} \circ \rho_{(Q,\beta)} = \rho_{(Q,\beta)} \circ \rho_{(P,\alpha)}$ se e só se $P = Q$;
c) $\rho_P \circ \rho_Q = \rho_Q \circ \rho_R$ se e só se Q é o ponto médio de $[PR]$;
d) $\rho_P \circ R_l = R_l \circ \rho_Q$ se e só se l é a mediatriz de $[PQ]$.

EXERCÍCIO 2.9.54. Mostre que:

a) Se uma isometria de $\mathbb{R}^2$ deixa uma única recta invariante, então é uma reflexão com deslize ao longo dessa recta.
b) Se R_l é uma reflexão numa recta l de $\mathbb{R}^2$ e f é uma isometria inversa de $\mathbb{R}^2$ então existe uma isometria directa g tal que $f = g \circ R_l$.
c) Se três rectas distintas l, m, n de $\mathbb{R}^2$ se intersectam num ponto P então $R_l \circ R_m \circ R_n$ é uma reflexão numa recta que passa em P.
d) Se l, m, n são três rectas de $\mathbb{R}^2$ que se intersectam num ponto P então $R_l \circ R_m \circ R_n = R_n \circ R_m \circ R_l$.
e) Se P e Q são dois pontos distintos de $\mathbb{R}^2$ então existe um número infinito de rotações ρ tais que $\rho(P) = Q$.
f) Se ℓ é uma recta de $\mathbb{R}^2$ e ρ_P é uma meia volta de centro $P \in \ell$ então $\rho_P \circ R_l \circ \rho_P = R_l$.
g) Em $\mathbb{R}^2$ a composta de uma meia-volta com uma translação é uma meia-volta.
h) Se f é uma isometria inversa de $\mathbb{R}^2$ então $f \circ f$ é uma translação.
i) Se f e g são duas isometria inversas de $\mathbb{R}^2$ então $f^2 \circ g^2 = g^2 \circ f^2$.
j) Dadas duas rectas distintas l_1, l_2 em $\mathbb{R}^2$, se existe um ponto P tal que $R_{l_1}(P) = R_{l_2}(P)$ então $P \in l_1 \cap l_2$.

k) A composta de um número par qualquer de reflexões em rectas paralelas de $\mathbb{R}^2$ é sempre uma translação perpendicular às rectas.

l) Qualquer isometria inversa de $\mathbb{R}^2$ é a composta de uma meia volta com uma reflexão;

m) Dados quaisquer três pontos $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$ tem-se

$$\rho_P \circ \rho_Q \circ \rho_R = \rho_R \circ \rho_Q \circ \rho_P = \rho_S \quad \text{com} \quad S \in \mathbb{R}^2.$$

EXERCÍCIO 2.9.55. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) Dados um vector $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e uma recta $l \subset \mathbb{R}^2$, a isometria $T_v \circ R_l$ não tem pontos fixos;

b) Se a composta de duas rotações $\rho_{P,\alpha}$ e $\rho_{Q,\beta}$ de $\mathbb{R}^2$ é uma translação não trivial então $\alpha = \beta$.

EXERCÍCIO 2.9.56. Se ℓ e m são duas rectas concorrentes de $\mathbb{R}^2$ indique, justificando, o conjunto de pontos $P \in \mathbb{R}^2$ para os quais $\rho_{P,\alpha}(\ell) = m$ para algum $\alpha \in [0, 2\pi[$, onde $\rho_{P,\alpha}$ é a rotação de centro P e ângulo α.

EXERCÍCIO 2.9.57. Descreva a isometria de $\mathbb{R}^2$ obtida por composição de uma translação com uma rotação não trivial.

EXERCÍCIO 2.9.58. Descreva a isometria de $\mathbb{R}^2$ obtida por composição de duas reflexões deslizantes com eixos perpendiculares.

EXERCÍCIO 2.9.59. Mostre que uma isometria directa $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma translação se e só se existem isometrias directas $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tais que $h = f \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1}$.

EXERCÍCIO 2.9.60. Descreva a isometria de $\mathbb{R}^2$ obtida por composição de duas reflexões deslizantes com eixos paralelos.

EXERCÍCIO 2.9.61. (*Relação de Thomsen*) Dadas quaisquer três rectas ℓ, m, n de $\mathbb{R}^2$ mostre que

$$R_\ell \circ R_m \circ R_n \circ R_l \circ R_m \circ R_n \circ R_m \circ R_n \circ R_\ell \circ R_m \circ R_n \circ R_\ell \circ \\ \circ R_n \circ R_m \circ R_\ell \circ R_n \circ R_m \circ R_n \circ R_m \circ R_\ell \circ R_n \circ R_m = \mathrm{id}$$

onde R_ℓ, R_m e R_n são as reflexões nas rectas ℓ, m e n.

EXERCÍCIO 2.9.62. Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^2$. Mostre que se P é um centro de simetria de A então, qualquer que seja a simetria f de A, o ponto $f(P)$ é também um centro de simetria de A.

EXERCÍCIO 2.9.63. Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^2$. Mostre que se l é um eixo de simetria de A então, qualquer que seja a simetria f de A, a recta $f(l)$ é também um eixo de simetria de A.

EXERCÍCIO 2.9.64. Diga quais dos seguintes conjuntos são subgrupos do grupo $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ de isometrias de $\mathbb{R}^2$:

a) O conjunto de todas as translações;
b) O conjunto de todas as isometrias $g \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ tais que $g(0,0) = (0,0)$;
c) O conjunto de todas as isometrias $g \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ tais que $g(1,2) = (4,5)$;
d) O conjunto de todas as reflexões com deslize.

EXERCÍCIO 2.9.65. Diga se o subgrupo de isometrias de $\mathbb{R}^2$ gerado por duas reflexões em rectas paralelas distintas é finito ou infinito.

EXERCÍCIO 2.9.66. Dê exemplos, se existirem, de

a) um subgrupo de isometrias de $\mathbb{R}^2$ com 15 elementos que não seja comutativo;
b) um subgrupo de isometrias de $\mathbb{R}^2$ com 5 elementos;
c) um subgrupo de isometrias de $\mathbb{R}^2$ com 10 elementos que não seja comutativo;
d) um subgrupo infinito de isometrias de $\mathbb{R}^2$ que não contenha translações não triviais;
e) um subgrupo infinito de isometrias de $\mathbb{R}^2$ que não contenha translações não triviais e que contenha isometrias inversas.

EXERCÍCIO 2.9.67. Descreva o subgrupo G de isometrias de $\mathbb{R}^2$ gerado pelas translações segundo os vectores $(1,0)$ e $(0,1)$ e os conjuntos

$$A = \{X \in \mathbb{R}^2 : X = f(1,0), \text{ para algum } f \in G\}$$
$$B = \{X \in \mathbb{R}^2 : X = f(0,1), \text{ para algum } f \in G\}.$$

Mostre que, para qualquer ponto $Q \in \mathbb{R}^2$, existe um ponto $P \in [0,1[\times[0,1[$ e $f \in G$ tal que $f(P) = Q$.

EXERCÍCIO 2.9.68. Seja G um grupo de isometrias de $\mathbb{R}^2$ cujas translações formam o grupo $\langle T_u, T_v \rangle$ gerado por duas translações T_u, T_v com u e v dois vectores linearmente independentes. Sejam $\rho_{A,\alpha}$ e $\rho_{B,\alpha}$ duas rotações não triviais em G com o mesmo ângulo e centros distintos A e B.

a) Classifique a isometria $f := \rho_{A,\alpha} \circ \rho_{B,\alpha}^{-1} \in G$.
b) Determine $f(B)$.
c) Mostre que $\|\overrightarrow{B\ f(B)}\| \leq 2d(A,B)$.

d) Conclua que existe $L > 0$ tal que $d(A, B) \geq L$.

EXERCÍCIO 2.9.69. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) dado um plano $\mathcal{H}$ de $\mathbb{R}^3$ existe apenas um número finito de isometrias $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tais que $f(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$;
b) em $\mathbb{R}^3$ a composição de três reflexões nunca é uma reflexão.

EXERCÍCIO 2.9.70. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma isometria não trivial para a qual existe um vector não nulo $u \in \mathbb{R}^3$, tal que $\vec{\phi}(u) = u$, onde $\vec{\phi}$ é a aplicação ortogonal associada a f. Diga, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras:

a) se f não tem pontos fixos então ou f é uma reflexão deslizante ou é um parafuso;
b) se f tem pontos fixos então f é uma reflexão com rotação;
c) se f tem pontos fixos e existe um vector $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tal que $v + \vec{\phi}(v) = 0$, então f é uma rotação em torno dum eixo com a direcção de v;
d) se f tem pontos fixos e existe um vector $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tal que $v + \vec{\phi}(v) = 0$, então ou f é uma reflexão num plano perpendicular a v, ou é uma rotação em torno dum eixo com a direcção de u.

EXERCÍCIO 2.9.71. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) em $\mathbb{R}^3$ a composição de uma transformação helicoidal com uma inversão é uma transformação helicoidal.
b) se $\rho_{\ell,\pi}$ é uma rotação de ângulo π em torno de uma recta ℓ de $\mathbb{R}^3$, se ρ_P é a inversão em P, então $\rho_{\ell,\pi} \circ \rho_P$ é uma reflexão com deslize se e só se $P \notin \ell$.

EXERCÍCIO 2.9.72. Descreva a isometria de $\mathbb{R}^3$ que se obtém por composição de uma reflexão num plano $\mathcal{H}$ com uma inversão num ponto $P \notin \mathcal{H}$.

EXERCÍCIO 2.9.73. Descreva a isometria de $\mathbb{R}^3$ obtida por composição de três meias voltas $\rho_{m_i,\pi}$ em torno de três rectas m_1, m_2, m_3 perpendiculares duas a duas e que se intersectam simultaneamente num ponto P.

EXERCÍCIO 2.9.74. Dada uma reflexão $R_{\mathcal{H}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ num hiperplano $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^3$ quais as rotações de $\mathbb{R}^3$ que comutam com $R_{\mathcal{H}}$?

EXERCÍCIO 2.9.75. Considere uma reflexão $R_{\mathcal{H}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ num hiperplano $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^3$ e uma translação $T_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Descreva a isometria $T_u \circ R_{\mathcal{H}}$ sabendo que T_u e $R_{\mathcal{H}}$ não comutam.

EXERCÍCIO 2.9.76. Mostre que qualquer transformação helicoidal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é a composta $f = g \circ h$ de duas isometrias directas g e h tais que $g^2 = h^2 = id_{\mathbb{R}^3}$.

CAPÍTULO 3

Geometria Projectiva

Neste capítulo introduz-se a geometria projectiva que estuda as propriedades geométricas invariantes por projecção.

3.1. Espaço Projectivo

DEFINIÇÃO 3.1.1. *Seja V um espaço vectorial de dimensão $n+1$ sobre um corpo K (por exemplo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). O* ***espaço projectivo*** $\mathbb{P}(V)$ *de V de dimensão n é o conjunto*

$$\mathbb{P}(V) := \{\mathcal{L}\{v\} : v \in V \setminus \{0\}\}$$

dos subespaços vectoriais de V de dimensão 1. Os elementos de um espaço projectivo designam-se por ***pontos****.*

Cada vector $v \in V \setminus \{0\}$ determina um ponto de $\mathbb{P}(V)$ e dois vectores $v, w \in V \setminus \{0\}$ determinam o mesmo ponto se e só se geram o mesmo subespaço de V. Assim, temos

$$\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\}) / \sim,$$

onde se considera em $V \setminus \{0\}$ a relação de equivalência definida por

$$v \sim w \Leftrightarrow w = \lambda v$$

para algum escalar $\lambda \neq 0$. Temos então uma projecção

$$\pi : V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$$

que a cada $v \in V \setminus \{0\}$ faz corresponder o ponto de $\mathbb{P}(V)$ definido por $\mathcal{L}\{v\}$ (i.e. $\pi(v) = [v]$, onde $[v]$ designa a classe de equivalência do vector v).

EXEMPLO 3.1.2. O **plano projectivo real**, $\mathbb{P}^2 := \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$, é o conjunto dos subespaços de dimensão 1 de $\mathbb{R}^3$. Em geral, o espaço projectivo associado a $\mathbb{R}^{n+1}$ é designado por $\mathbb{P}^n$. A notação $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{RP}^n$ é também muito frequente.

EXEMPLO 3.1.3. A **recta projectiva complexa**, $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} := \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$, é o conjunto dos subespaços de dimensão (complexa) 1 de $\mathbb{C}^2$. Em geral, o espaço projectivo associado a $\mathbb{C}^{n+1}$ é designado por $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ ou ainda por $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ou $\mathbb{CP}^n$.

Dada uma base B do espaço vectorial V, cada vector $v \in V \setminus \{0\}$ fica definido pelas suas coordenadas $v_B = (x_0, \ldots, x_n)$ nessa base (em que pelo menos uma das coordenadas é diferente de 0). Se $u \in \mathcal{L}\{v\}$ é outro vector não nulo, então $u_B = (y_0, \ldots, y_n)$ onde $(y_0, \ldots, y_n) = \lambda(x_0, \ldots, x_n)$ com $\lambda \neq 0$. Assim o ponto $P = [v]$ de $\mathbb{P}(V)$ correspondente a $\mathcal{L}\{v\}$ fica identificado tanto por $(x_0, \ldots, x_n)$ como por $(y_0, \ldots, y_n)$.

Utiliza-se então a notação

$$[x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$$

para designar o ponto P e diz-se que $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$ são as **coordenadas homógeneas** de P (em relação à base B).

EXEMPLO 3.1.4. O ponto $P \in \mathbb{P}^2$ de coordenadas homogéneas $[12 : 6 : 18]$ (em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$) pode também ser representado, por exemplo, por $[2 : 1 : 3]$ ou $[4 : 2 : 6]$.

NOTA 3.1.5. Fixada uma base $B = (e_0, \ldots, e_n)$ de V obtemos uma aplicação linear bijectiva $g : K^{n+1} \to V$ que à base canónica de K^{n+1} faz corresponder a base B. Podemos então considerar a aplicação

$$h := \pi \circ g : K^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$$

e as coordenadas homogéneas correspondentes em $\mathbb{P}(V)$. No que se segue faremos este tipo de identificação.

3.2. Subespaços projectivos

DEFINIÇÃO 3.2.1. *Um subconjunto E de $\mathbb{P}(V)$ diz-se um* **subespaço projectivo** *de dimensão m se $\pi^{-1}(E) \cup \{0\}$ é um subespaço vectorial de V de dimensão $m + 1$.*

Tal como acontece com espaços vectoriais um subespaço projectivo é ele próprio um espaço projectivo. Com efeito, se E é um subespaço projectivo e W é o subespaço vectorial tal que $W = \pi^{-1}(E) \cup \{0\}$, então E é o conjunto dos subespaços de dimensão 1 de W, ou seja

$$E = \mathbb{P}(W) := \{\mathcal{L}\{v\} : v \in W \setminus \{0\}\}.$$

Um (sub)espaço projectivo de dimensão 0 é constituído por um único ponto, uma **recta projectiva** é um (sub)espaço projectivo de dimensão 1, um **plano projectivo** é um (sub)espaço projectivo de dimensão 2, um **k-plano projectivo** é um (sub)espaço projectivo de dimensão k e um **hiperplano projectivo** é um subespaço projectivo de dimensão $n-1$.

Define-se **codimensão** de um subespaço projectivo E como sendo o número $k := n - m$ onde m é a dimensão de E.

NOTA 3.2.2. Fixada uma base B em V, um subespaço projectivo $E = \mathbb{P}(W)$ de dimensão m fica definido por um sistema de equações lineares homogéneas em $n+1$ incógnitas (onde $\dim V = n+1$) e de grau de indeterminação $m+1$ (o mesmo sistema que define as coordenadas dos vectores de W na base B).

PROPOSIÇÃO 3.2.3. *Dados dois pontos distintos $P, Q \in \mathbb{P}(V)$ existe uma única recta projectiva que passa em P e Q.*

Demonstração: Sejam $P = [u]$ e $Q = [v]$ dois pontos de $\mathbb{P}(V)$ onde $u, v \in V \setminus \{0\}$ (isto é P e Q são os pontos de $\mathbb{P}(V)$ que correspondem aos subespaços $\mathcal{L}\{u\}$ e $\mathcal{L}\{v\}$ de V respectivamente). Note que u e v são dois vectores linearmente independentes pois $P \neq Q$.

Então $W := \mathcal{L}\{u, v\}$ é um subespaço de V de dimensão 2 que contém os vectores u e v, pelo que $\mathbb{P}(W)$ é uma recta projectiva de $\mathbb{P}(V)$ que contém P e Q.

Se $\mathbb{P}(W')$ é uma outra recta projectiva de $\mathbb{P}(V)$ que contém P e Q (onde W' é um subespaço de V de dimensão 2), então u e v estão em W', pelo que $\mathcal{L}\{u, v\} \subseteq W'$. Como estes dois espaços têm a mesma dimensão, conclui-se que $W = W'$. □

EXEMPLO 3.2.4. Vejamos qual a recta projectiva $\ell \subset \mathbb{P}^2$ que passa nos pontos $[1:1:0]$ e $[1:0:1]$. Para isso determinamos o subespaço $W \subset \mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $(1,1,0)$ e $(1,0,1)$. Como

$$(x_0, x_1, x_2) \in W := \mathcal{L}\{(1,1,0), (1,0,1)\}$$

se e só se a característica das matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & x_0 \\ 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & x_0 \\ 0 & -1 & x_1 - x_0 \\ 0 & 1 & x_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & x_0 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_1 - x_0 + x_2 \end{bmatrix}$$

é igual a dois, conclui-se que $(x_0, x_1, x_2) \in W$ se e só se $-x_0 + x_1 + x_2 = 0$. Assim,

$$\ell = \left\{ [x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 : \; x_0 - x_1 - x_2 = 0 \right\}.$$

PROPOSIÇÃO 3.2.5. *Num **plano projectivo**, quaisquer duas rectas projectivas distintas intersectam-se num único ponto.*

Demonstração: Seja $\mathbb{P}(V)$ um plano projectivo (isto é $\dim V = 3$) e sejam $\ell, m \subset \mathbb{P}(V)$ duas rectas projectivas. Então $\ell = \mathbb{P}(U)$ e $m = \mathbb{P}(W)$ para U e W subespaços vectoriais de V de dimensão 2 e

$$\begin{aligned} 3 = \dim(V) \geq \dim(U + W) &= \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) \\ &= 4 - \dim(U \cap W), \end{aligned}$$

pelo que

$$1 \leq \dim(U \cap W) \leq 2.$$

Como as duas rectas são distintas, temos $U \neq W$, pelo que $\dim(U \cap W) = 1$ e então $\ell \cap m = \mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(U \cap W)$ tem dimensão 0. □

Nesta demonstração usámos o facto de que a intersecção de dois subespaços projectivos $\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W)$ é o subespaço projectivo $\mathbb{P}(U \cap W)$. Em geral temos o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 3.2.6. *A intersecção de subespaços projectivos de um espaço projectivo $\mathbb{P}(V)$ é um subespaço projectivo.*

Demonstração: Basta ver que pela definição de subespaço projectivo a intersecção de uma família qualquer de subespaços projectivos é a imagem por meio de π da intersecção dos subespaços vectoriais correspondentes. □

Podemos assim considerar a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 3.2.7. *Seja S um subconjunto de $\mathbb{P}(V)$. O **subespaço projectivo** $\langle S \rangle$ **gerado por** S, ou* **fecho projectivo** *de S, é a intersecção de todos os subespaços projectivos de $\mathbb{P}(V)$ que contêm S (ou seja é o menor subespaço projectivo de $\mathbb{P}(V)$ que contém S).*

Note que $\langle S \rangle = \mathbb{P}(W)$ onde W é o subespaço vectorial de V gerado por

$$\widetilde{S} := \{ v \in V : \; [v] \in S \}.$$

Se $S = \{P_0, \ldots, P_k\}$, onde $P_0, \ldots, P_k \in \mathbb{P}(V)$, então

$$\langle S \rangle = \langle P_0, \ldots, P_k \rangle = \mathbb{P}\left(\mathcal{L}\{u_0, \ldots, u_k\} \right),$$

onde $u_0, \ldots, u_k \in V$ são tais que $P_i = [u_i]$ para $i = 0, \ldots, k$. Então

$$\dim\langle P_0, \ldots, P_k\rangle \leq k$$

e $\dim\langle P_0, \ldots, P_k\rangle = k$ se e só se os vectores $u_0, \ldots, u_k$ são linearmente independentes. Neste caso diz-se que os **pontos** $P_0, \ldots, P_k$ são **independentes**.

EXEMPLO 3.2.8. Considere-se os seguintes pontos de $\mathbb{P}^3$:

$$P = [1:1:0:0], \quad Q = [1:0:0:0], \quad R = [2:0:1:0] \quad \text{e} \quad S = [4:2:0:0].$$

Então $\langle P, Q, R, S\rangle = \mathbb{P}(W)$ onde

$$W = \mathcal{L}\{(1,1,0,0), (1,0,0,0), (2,0,1,0), (4,2,0,0)\}.$$

Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

temos

$$W = \mathcal{L}\{(1,1,0,0), (0,-1,0,0), (0,0,1,0)\}$$

e então $\dim\langle P, Q, R, S\rangle = 2$, pelo que os pontos não são independentes.

Vejamos agora como se relacionam as dimensões de subespaços projectivos.

TEOREMA 3.2.9. *Sejam E e F dois subespaços projectivos de $\mathbb{P}(V)$. Então*

$$\dim\langle E, F\rangle = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F),$$

onde $\dim \varnothing = -1$.

Demonstração: Sejam U e W dois subespaços vectoriais de V tais que

$$E = \mathbb{P}(U) \quad \text{e} \quad F = \mathbb{P}(W).$$

Então

$$E \cap F = \mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(U \cap W) \quad \text{e} \quad \langle E, F\rangle = \mathbb{P}(U + W).$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \dim\langle E, F\rangle &= \dim\, \mathbb{P}(U+W) = \dim(U+W) - 1 \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) - 1 \\ &= \dim E + 1 + \dim F + 1 - (\dim(E \cap F) + 1) - 1 \\ &= \dim E + \dim F - \dim(E \cap F). \end{aligned}$$

□

EXEMPLO 3.2.10. Seja $H \subset \mathbb{P}(V)$ um hiperplano projectivo e $P \in \mathbb{P}(V)$ um ponto tal que $P \notin H$. Então qualquer recta projectiva $r \subset \mathbb{P}(V)$ que passa em P intersecta H num único ponto. Com efeito,

$$\begin{aligned} n = \dim \mathbb{P}(V) = \dim \langle r, H \rangle &= \dim r + \dim H - \dim (r \cap H) \\ &= 1 + (n-1) - \dim (r \cap H), \end{aligned}$$

pelo que $\dim (r \cap H) = 0$.

3.3. Decomposições do espaço projectivo

Dado um hiperplano H num espaço projectivo $\mathbb{P}(V)$ de dimensão n, vamos ver que podemos identificar $\mathbb{P}(V) \backslash H$ com um espaço afim de dimensão n. Podemos então pensar em $\mathbb{P}(V)$ como a união disjunta de um espaço afim com um espaço projectivo H de codimensão 1. Vamos também ver que podemos considerar $\mathbb{P}(V)$ como união (não disjunta) de $n+1$ espaços afins de dimensão n.

Vejamos o caso particular de $\mathbb{P}^n_K := \mathbb{P}(K^{n+1})$. Para tal, consideremos K^{n+1} com a base canónica, o hiperplano H_0 de $\mathbb{P}^n_K$ definido pela equação $x_0 = 0$ e o conjunto

$$U_0 := \mathbb{P}^n_K \setminus H_0 = \{[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n_K : \quad x_0 \neq 0\}.$$

A aplicação $j_0 : K^n \to U_0$ definida por $(x_1, \ldots, x_n) \to [1 : x_1 : \cdots : x_n]$ estabelece uma bijecção entre K^n e U_0 onde $j_0^{-1} : U_0 \to K^n$ é definida por

$$[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \to \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0} \right).$$

Esta bijecção permite definir em U_0 uma estrutura afim a partir da estrutura afim canónica de K^n, onde consideramos o referencial canónico.

Como $\mathbb{P}^n_K = H_0 \sqcup U_0$, podemos ver $\mathbb{P}^n_K$ como a união disjunta de um espaço afim de dimensão n com um subespaço projectivo de dimensão $n-1$. Diz-se que H_0 é o **hiperplano** no infinito e o par (U_0, j_0^{-1}) diz-se uma **carta afim** de $\mathbb{P}^n_K$ (ou **vizinhança de coordenadas afins**).

Podemos também considerar os hiperplanos H_i definidos pelas equações $x_i = 0$, com $i = 1, \ldots, n$, aos quais correspondem as aplicações $j_i : K^n \to U_i$ definidas por

$$(x_1, \ldots, x_n) \to [x_1 : \cdots : x_{i-1} : 1 : x_i : \cdots : x_n],$$

onde os conjuntos U_i são dados por

$$U_i := \mathbb{P}^n_K \setminus H_i = \{[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n_K : \ x_i \neq 0\}.$$

Obtemos assim que $\mathbb{P}^n_K = U_0 \cup U_1 \cup \cdots \cup U_n$ é a união (não disjunta) de $n+1$ espaços afins de dimensão n.

No caso geral de um espaço projectivo $\mathbb{P}(V)$ obtemos decomposições de forma idêntica, usando a aplicação $h := \pi \circ g : K^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$ (ver Nota 3.1.5) e as coordenadas homogéneas em $\mathbb{P}(V)$ correspondentes.

Note que dado qualquer hiperplano H de um espaço projectivo $\mathbb{P}(V)$ de dimensão n podemos de novo identificar $\mathbb{P}(V) \setminus H$ com o espaço afim K^n, por exemplo escolhendo uma base de V na qual o hiperplano H é definido em coordenadas homogéneas $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$ pela equação $x_0 = 0$.

Uma outra forma de verificar que os conjuntos U_i estão em correspondência biunívoca com o espaço afim K^n é identificá-los com hiperplanos de K^{n+1}. Por exemplo, podemos identificar U_0 com o hiperplano de equação $x_0 = 1$ por meio de

$$[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \to \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) \in K^{n+1}.$$

Exemplo 3.3.1.

$$\mathbb{P}^1 = \big\{[x_0 : x_1] : (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\big\} = U_0 \sqcup H_0$$

onde $U_0 = \{[x_0 : x_1] : x_0 \neq 0 \text{ e } x_1 \in \mathbb{R}\}$ e $H_0 = \{[0 : x_1] : x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.

Assim,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^1 &= \{[1 : \frac{x_1}{x_0}] : x_0 \neq 0 \text{ e } x_1 \in \mathbb{R}\} \sqcup \{[0 : 1]\} \\ &= \{[1 : x_1] : \ x_1 \in \mathbb{R}\} \sqcup \{[0 : 1]\} \simeq \mathbb{R} \sqcup \{[0 : 1]\}.\end{aligned}$$

Nesta decomposição de $\mathbb{P}^1$ o ponto $[0 : 1]$ é o ponto no infinito, i.e. $\infty := [0 : 1]$ (ver Figura 3.1).

Exemplo 3.3.2.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^1 &= \big\{[x_0 : x_1] : (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\big\} = U_1 \sqcup H_1 \\ &= \{[x_0 : x_1] : x_1 \neq 0 \text{ e } x_0 \in \mathbb{R}\} \sqcup \{[x_0 : 0] : x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \\ &= \{[\frac{x_0}{x_1} : 1] : x_1 \neq 0 \text{ e } x_0 \in \mathbb{R}\} \sqcup \{[1 : 0]\} \\ &= \{[x_0 : 1] : \ x_0 \in \mathbb{R}\} \sqcup \{[1 : 0]\} \simeq \mathbb{R} \sqcup \{[1 : 0]\}.\end{aligned}$$

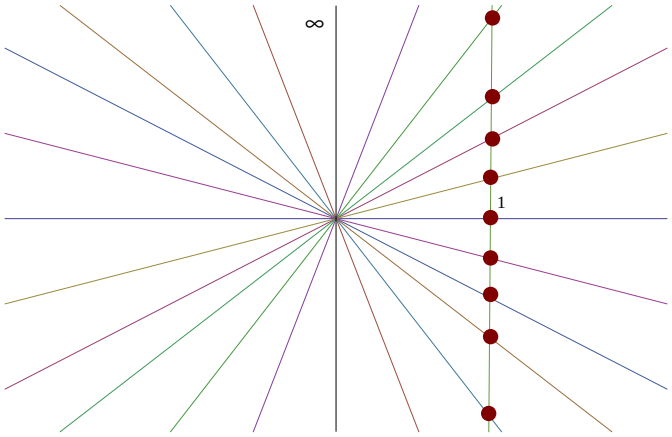

FIGURA 3.1. $\mathbb{P}^1 \simeq U_0 \sqcup \{[0:1]\}$.

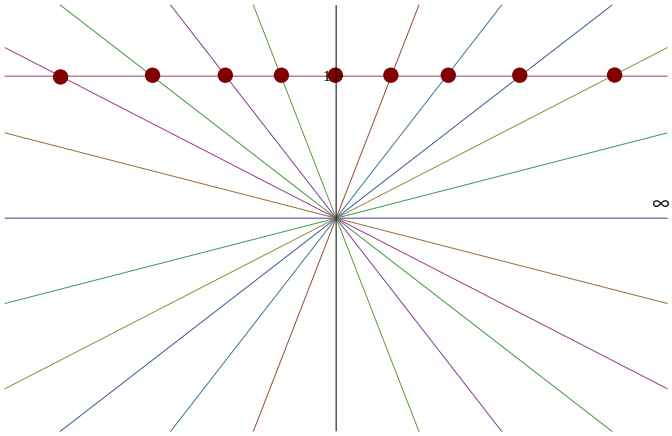

FIGURA 3.2. $\mathbb{P}^1 \simeq U_1 \sqcup \{[1:0]\}$

Nesta decomposição de $\mathbb{P}^1$ o ponto $[1:0]$ é o ponto no infinito, i.e. $\infty := [1:0]$ (ver Figura 3.2).

EXEMPLO 3.3.3.

$$\mathbb{P}^2 = \left\{[x_0 : x_1 : x_2] : (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\right\} = U_2 \sqcup H_2,$$

onde $U_2 = \left\{[x_0 : x_1 : x_2] : \ x_2 \neq 0 \text{ e } (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2\right\}$ e

$$H_2 = \{[x_0 : x_1 : 0] \, (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^2 &= \{[\frac{x_0}{x_2} : \frac{x_1}{x_2} : 1] : (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2\} \sqcup \{[x_0 : x_1 : 0] : (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\} \\ &\simeq \left\{[x_0 : x_1 : 1] : (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2\right\} \sqcup \{[x_0 : x_1] : (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\} \\ &\simeq \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{P}^1.\end{aligned}$$

Nesta decomposição de $\mathbb{P}^2$ os pontos da forma $[x_0 : x_1 : 0]$ com $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ formam uma recta projectiva no infinito (ver Figura 3.3).

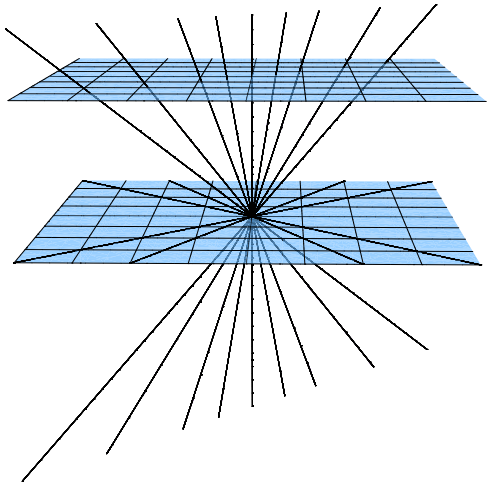

FIGURA 3.3. $\mathbb{P}^2 \simeq U_2 \sqcup \mathbb{P}^1$.

3.4. Mergulhos do espaço afim no espaço projectivo

Como vimos na secção anterior podemos sempre identificar o complementar de um hiperplano num espaço projectivo com um espaço afim. Inversamente, dado um espaço afim $\mathcal{A}$ associado a um espaço vectorial de dimensão n sobre um corpo K, podemos sempre identificá-lo com o complementar de um hiperplano de $\mathbb{P}^n_K$.

Uma forma de o fazer é fixar um referencial $R = (O; (e_1, ..., e_n))$ em $\mathcal{A}$, identificando assim $\mathcal{A}$ com K^n por meio de

$$P = O + a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n \to P_R = (a_1, \ldots, a_n) \in K^n$$

e depois identificar K^n com o complementar de um hiperplano de $\mathbb{P}^n_K$. Podemos assim pensar num espaço projectivo como uma forma de completar um espaço afim juntando pontos no infinito.

Por exemplo, usando coordenadas homogéneas em $\mathbb{P}^n_K$ em relação à base canónica de K^{n+1} e identificando K^n com U_0, obtemos uma aplicação injectiva (um **mergulho**) $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{P}^n_K$ definida por

$$P = O + a_1e_1 + \cdots + a_ne_n \to (a_1, \ldots, a_n) \to [1 : a_1 : \cdots : a_n].$$

É fácil verificar que o fecho projectivo $\langle U_0 \rangle$ de U_0 é $\mathbb{P}^n_K$ e que o fecho projectivo da imagem de um subespaço afim $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$ definido em relação ao referencial R por um sistema

$$\text{(3.4.1)} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

é o subespaço projectivo F de $\mathbb{P}^n_K$ definido pelo sistema

$$\text{(3.4.2)} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1x_0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_mx_0. \end{cases}$$

Exemplo 3.4.1. Consideremos o espaço afim $\mathbb{R}^2$ com o referencial canónico e o mergulho de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{P}^2$ por meio de $(a_1, a_2) \xrightarrow{\varphi} [1 : a_1 : a_2]$. Identificamos assim $\mathbb{R}^2$ com o complementar do hiperplano H_0 de $\mathbb{P}^2$ (note que H_0 é uma recta projectiva).

Seja l a recta de $\mathbb{R}^2$ que passa no ponto (1,2) com a direcção do vector $v = (1, -1)$. Esta recta é definida em relação ao referencial canónico pela equação $x_1 + x_2 = 3$.

O fecho projectivo $\bar{l}$ de $\varphi(l)$ é a recta de $\mathbb{P}^2$ definida pela equação

$$x_1 + x_2 = 3x_0$$

e $\bar{l} \cap H_0 = [0 : 1 : -1]$. Note que o fecho projectivo $\bar{r}$ da imagem de qualquer recta r paralela a l satisfaz $\bar{r} \cap H_0 = [0 : 1 : -1]$.

3.5. Dualidade

Seja V um espaço vectorial sobre K e V^* o seu espaço dual. O espaço projectivo $\mathbb{P}(V^*)$ chama-se o espaço dual de $\mathbb{P}(V)$ e indica-se também por $\mathbb{P}(V)^*$.

Dadas coordenadas homogéneas em $\mathbb{P}(V)$ definidas por uma base B de V chamam-se coordenadas homogéneas duais às coordenadas homogéneas de $\mathbb{P}(V)^*$ definidas pela base dual B^* de B. Dado um ponto $P = [f]$ de $\mathbb{P}(V)^*$ (ou seja uma classe de equivalência de formas lineares), onde f é

definida por $f(x_0, \ldots, x_n) = a_0x_0 + \cdots + a_nx_n$ em relação à base B, então as coordenadas de f na base B^* são $(a_0, \ldots, a_n)$ e as coordenadas homogéneas duais de P são $[a_0 : \cdots : a_n]$.

Por outro lado, o conjunto dos pontos de $\mathbb{P}(V)$ cujas coordenadas homogéneas (em relação à base B) são solução da equação $a_0x_0 + \cdots + a_nx_n = 0$ é um hiperplano de $\mathbb{P}(V)$. Temos assim uma correspondência biunívoca entre pontos de $\mathbb{P}(V)^*$ e hiperplanos de $\mathbb{P}(V)$.

Em geral, a correspondência biunívoca entre subespaços vectoriais de V de dimensão $m + 1$ e subespaços vectoriais de V^* de dimensão $n - m$ dada por $M \to Ann(M)$ onde

$$Ann(M) := \{f \in V^* : f(M) = \{0\}\}$$

estabelece uma correspondência biunívoca (a que se dá o nome de correspondência de dualidade) entre subespaços projectivos de $\mathbb{P}(V)$ de dimensão m e subespaços projectivos de $\mathbb{P}(V)^*$ de dimensão $n - m - 1$.

Usando as propriedades dos aniquiladores (ver Anexo D) temos as seguintes propriedades, onde $\delta(F)$ é o subespaço de $\mathbb{P}(V)^*$ que corresponde a um subespaço projectivo F de $\mathbb{P}(V)$:

PROPOSIÇÃO 3.5.1. *Sejam F_1 e F_2 subespaços projectivos de um espaço projectivo $\mathbb{P}(V)$ de dimensão n.*

1) Se dim $F_1 = m$ então dim $\delta(F_1) = n - m - 1$.
2) $F_1 \subset F_2$ se e só se $\delta(F_1) \supset \delta(F_2)$.
3) $\delta(F_1 \cap F_2) = \langle \delta(F_1), \delta(F_2) \rangle$.
4) $\delta(\langle F_1, F_2 \rangle) = \delta(F_1) \cap \delta(F_2)$.

DEFINIÇÃO 3.5.2. *Dada uma afirmação A envolvendo subespaços projectivos de um espaço projectivo de dimensão n, subespaços projectivos gerados por uma união de subespaços, interseções de subespaços e dimensão m, chama-se* ***afirmação dual de*** *A à afirmação A' obtida substituindo "gerado", "intersecção", "contido", "contendo" e "dimensão m" por "intersecção", "gerado", "contendo", "contido" e "dimensão $n - m - 1$" respectivamente.*

EXEMPLO 3.5.3. A afirmação dual de "*A intersecção de dois hiperplanos distintos em $\mathbb{P}^n$ é um subespaço projectivo de dimensão $n-2$*" é "*Dois pontos distintos em $\mathbb{P}^n$ geram uma recta*".

A afirmação dual de "*Em $\mathbb{P}^2$ dois pontos distintos definem uma única recta*" é "*Em $\mathbb{P}^2$ duas rectas distintas intersectam-se num único ponto*".

Como consequência da Proposição 3.5.1 e do facto de $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V)^*$ se identificarem com $\mathbb{P}^n_K$ temos o seguinte resultado.

TEOREMA 3.5.4 (**Principio da dualidade**). *Uma afirmação A envolvendo subespaços projectivos, subespaços gerados, intersecções de subespaços e dimensões é verdadeira se e só se a afirmação dual de A o for.*

3.6. Aplicações projectivas

Sejam V e W dois espaços vectoriais de dimensão finita e $T : V \to W$ uma aplicação linear. Se T é invertível e U é um subespaço vectorial de V, então $T(U)$ é um subespaço vectorial de W com a mesma dimensão de U. Em particular, a aplicação T transforma subespaços vectoriais de dimensão 1 em subespaços vectoriais de dimensão 1, induzindo uma aplicação $\tau : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ entre os espaços projectivos correspondentes:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}(V) & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{P}(W) \\ [v] & \longmapsto & [T(v)] \end{array}$$

DEFINIÇÃO 3.6.1. *Uma **aplicação projectiva** $\tau : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ é uma aplicação induzida por uma aplicação linear invertível $T : V \to W$, ou seja, tal que*

$$\tau\left([v]\right) = \left[T(v)\right], \quad \forall\, [v] \in \mathbb{P}(V).$$

EXEMPLO 3.6.2. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação linear definida por

$$T(x, y) = (x + y, 2x - y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Como

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = -3$$

a aplicação T é invertível e induz uma aplicação projectiva $\tau : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ dada por

$$\tau([x : y]) = [x + y : 2x - y].$$

Se $T : V \to W$ é uma aplicação linear invertível e λ é um escalar diferente de 0, então T e λT induzem a mesma aplicação projectiva $\tau : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ pois

$$\left[(\lambda T)(v)\right] = \left[\lambda\, T(v)\right] = \left[T(v)\right].$$

Inversamente, se T e T' definem a mesma aplicação projectiva, então existe um escalar $\lambda \neq 0$ tal que $T = \lambda\, T'$. Com efeito, se $\{v_1, \dots v_n\}$ é uma base de V, então

$$\tau([v_i]) = [T(v_i)] = [T'(v_i)] \Rightarrow T(v_i) = \lambda_i T'(v_i) \tag{3.6.1}$$

para escalares $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n$. Por outro lado,

$$\tau\left(\left[\sum_{i=1}^{n} v_i\right]\right) = \left[T\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)\right] = \left[T'\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)\right]$$

pelo que

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) = \lambda\, T'\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) \tag{3.6.2}$$

para algum escalar $\lambda \neq 0$. Usando a linearidade de T, (3.6.1) e (3.6.2), temos

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} T(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, T'(v_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} T'(v_i).$$

Como os vectores $\{T'(v_1), \dots, T'(v_n)\}$ formam uma base de $T'(V)$ e os coeficientes da representação de um vector numa dada base são únicos, temos $\lambda_i = \lambda$ para $i = 1, \dots, n$ pelo que $T = \lambda T'$. Com efeito,

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda\, T'(v_i) = \left(\lambda\, T'\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right)$$

para quaisquer escalares $a_1, \dots, a_n$.

Exemplo 3.6.3. Sejam $r := \mathbb{P}(U)$ e $r' := \mathbb{P}(U')$ duas rectas projectivas de um plano projectivo $\mathbb{P}(V)$ onde U e U' são dois subespaços vectoriais de V de dimensão 2 (note que $\dim V = 3$). Seja Q um ponto de $\mathbb{P}(V)$ tal que $Q \notin (r \cup r')$. Pelas Proposições 3.2.3 e 3.2.5, para cada ponto $X \in r$ a única recta projectiva de $\mathbb{P}(V)$ que passa em Q e em X intersecta r' num único ponto $\tau(X)$. Então a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \tau: & r & \longrightarrow & r' \\ & X & \longmapsto & \tau(X) \end{array}$$

é uma aplicação projectiva (ver Figura 3.4).

Vejamos qual a aplicação linear $T : U \to U'$ que a induz. Para isso considere-se um vector $u \in V$ tal que $Q = [u]$ e o subespaço

$$W := \mathcal{L}\{u\} \subset V$$

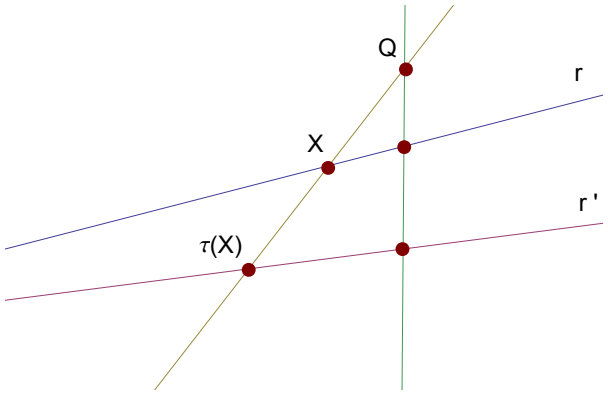

FIGURA 3.4. A aplicação $\tau : r \to r'$.

(note que $Q = \mathbb{P}(W)$). Como $Q \notin r'$ temos que $W \cap U' = \{0\}$ e então, como $\dim V = 3$, temos $V = W \oplus U'$.

Dado $X \in r$ considere-se $v \in V$ tal que $X = [v]$. Como $V = W \oplus U'$, o vector v pode ser escrito univocamente como uma soma $v = w + u'$ onde $w \in W$ e $u' \in U'$. Como

$$W = \mathcal{L}\{u\} = \mathcal{L}\{w\},$$

temos que a recta projectiva que passa em Q e em X é

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{L}\{w, v\}\right) = \mathbb{P}\left(\mathcal{L}\{w, u'\}\right)$$

e

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\mathcal{L}\{w, u'\}\right) \cap r' &= \mathbb{P}\left(\mathcal{L}\{w, u'\}\right) \cap \mathbb{P}(U') \\ &= \mathbb{P}\left(\mathcal{L}\{w, u'\} \cap U'\right) = \mathbb{P}\left(\mathcal{L}\{u'\}\right) = \{[u']\}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\tau(X) = \tau([v]) = \tau([w + u']) = [u'],$$

pelo que τ é induzida pela aplicação linear $T : U \to U'$ dada pela restrição a U da projecção

$$\begin{array}{rccc} \text{Proj}: & V = W \oplus U' & \to & U' \\ & v = \widetilde{w} + \widetilde{u}' & \mapsto & \widetilde{u}' \end{array}.$$

Esta aplicação é invertível pois o seu núcleo é trivial. Com efeito,

$$T(u) = 0 \Leftrightarrow u \in W \text{ e } u \in U \Rightarrow u \in W \cap U = \{0\}$$

pois $Q \notin U$.

DEFINIÇÃO 3.6.4. *Seja $\mathbb{P}(V)$ um espaço projectivo de dimensão n. Um conjunto de $n+2$ pontos de $\mathbb{P}(V)$ diz-se um* ***referencial projectivo*** *se quaisquer $n+1$ desses pontos forem independentes.*

EXEMPLO 3.6.5. Três pontos distintos P, Q, R de uma recta projectiva formam sempre um referencial projectivo pois quaisquer dois pontos são independentes.

DEFINIÇÃO 3.6.6. *Em $\mathbb{P}^n$ designa-se por* ***referencial projectivo canónico*** *o referencial formado pelos pontos*

$$P_0 = [1 : 0 : \cdots : 0],\ P_1 = [0 : 1 : 0 : \cdots : 0],\ \ldots,\ P_n = [0 : \cdots : 0 : 1] \text{ e}$$
$$P_{n+1} = [1 : 1 : \cdots : 1].$$

Uma aplicação projectiva fica univocamente determinada pela imagem de um referencial projectivo.

TEOREMA 3.6.7. *Se $\{P_1, \ldots, P_{n+2}\}$ é um referencial de um espaço projectivo $\mathbb{P}(V)$ e $\{Q_1, \ldots, Q_{n+2}\}$ um referencial de um espaço projectivo $\mathbb{P}(W)$, então existe uma única aplicação projectiva $\tau : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ tal que $\tau(P_i) = Q_i$ para $i = 1, \ldots, n+2$.*

Demonstração: Sejam $v_1, \ldots, v_{n+2}$ vectores de V tais que $P_i = [v_i]$ para $i = 1, \ldots, n+2$. Como os pontos $P_1, \ldots, P_{n+2}$ formam um referencial projectivo, por exemplo os primeiros $n+1$ destes vectores são linearmente independentes, formando uma base de V. Então

$$v_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i v_i$$

para alguns escalares a_i. Se algum destes escalares fosse 0, por exemplo se $a_1 = 0$, então os vectores $v_{n+2}, v_2, v_3, \ldots, v_{n+1}$ não seriam independentes e $\{P_1, \ldots, P_{n+2}\}$ não seria um referencial projectivo. Concluímos assim que $a_i \neq 0$ para $i = 1, \ldots, n+1$.

Como $P_i = [v_i] = [a_i v_i]$, podemos escolher representantes $\widetilde{v}_i := a_i v_i$ dos pontos P_i (i.e. tais que $[\widetilde{v}_i] = P_i$), de forma a ter

$$v_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} \widetilde{v}_i.$$

Além disso, fixando v_{n+2}, estes representantes dos pontos P_i são únicos pois os escalares a_i $(i = 1, \ldots, n+1)$ são univocamente determinados por v_{n+2}.

Podemos pois assumir, sem perda de generalidade, que temos $P_i = [v_i]$ para $i = 1, \ldots, n+2$, com

$$v_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} v_i.$$

Analogamente, considerando o referencial $\{Q_1, \ldots, Q_{n+2}\}$, podemos escolher vectores $w_1, \ldots, w_{n+2}$ de W tais que $Q_i = [w_i]$ para $i = 1, \ldots, n+2$ e

$$w_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} w_i.$$

Tomando as bases $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ e $\{w_1, \ldots, w_{n+1}\}$ de V e W, existe uma única aplicação linear $T : V \to W$ tal que $T(v_i) = w_i$ para todo o $i = 1, \ldots, n+1$. Esta aplicação é invertível pois os vectores $w_1, \ldots, w_{n+1}$ são linearmente independentes. Além disso,

$$T(v_{n+2}) = T\left(\sum_{i=1}^{n+1} v_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} T(v_i) = \sum_{i=1}^{n+1} w_i = w_{n+2},$$

pelo que T induz uma aplicação projectiva $\tau : \mathbb{P}(U) \to \mathbb{P}(W)$ que satisfaz $\tau(P_i) = Q_i$ para todo o $i = 1, \ldots, n+2$.

Esta aplicação é a única que verifica $\tau(P_i) = Q_i$ para $i = 1, \ldots, n+2$. Com efeito, escolhendo vectores $v_1, \ldots, v_{n+2} \in V$ e $w_1, \ldots, w_{n+2} \in W$ tais que $P_i = [v_i]$, $Q_i = [w_i]$ para $i = 1, \ldots, n+2$,

$$v_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} v_i \quad \text{e} \quad w_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} w_i, \tag{3.6.3}$$

se $\tau' : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ é uma outra aplicação projectiva (induzida por uma aplicação linear invertível $T' : V \to W$) que satisfaz $\tau'(P_i) = Q_i$ para $i = 1, \ldots, n+2$, então

$$\tau'(P_i) = Q_i \Leftrightarrow [T'(v_i)] = [w_i] \quad \forall i \in \{1, \ldots, n+2\},$$

pelo que existem escalares $b_1, \ldots, b_{n+2}$ tais que $T'(v_i) = b_i\, w_i$, para todo o $i = 1, \ldots, n+2$ e

$$\beta_{n+2}\, w_{n+2} = T'(v_{n+2}) = T'\left(\sum_{i=1}^{n+1} v_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} T'(v_i) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i\, w_i.$$

Por outro lado, por (3.6.3), temos

$$b_{n+2}\, w_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} b_{n+2}\, w_i,$$

pelo que se conclui que todos os b_i são iguais a b_{n+2}. Então

$$T'(v_i) = b_{n+2}\, T(v_i) \quad \forall i \in \{1, \ldots, n+1\},$$

pelo que $T' = b_{n+2}\, T$ e $\tau = \tau'$. □

EXEMPLO 3.6.8. Sejam $P_0 = [1 : 0]$, $P_1 = [0 : 1]$ e $P_2 = [1 : 1]$ os pontos do referencial canónico de $\mathbb{P}^1$. Vejamos como determinar a aplicação projectiva $\tau : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ que verifica

$$\tau(P_0) = P_2, \quad \tau(P_1) = P_0 \quad \text{e} \quad \tau(P_2) = P_1.$$

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear associada a τ. Como queremos $\tau(P_0) = P_2$ temos $[T(1,0)] = [1 : 1]$, pelo que $T(1,0)$ é múltiplo do vector $(1,1)$. Por outro lado, como $\tau(P_1) = P_0 = [1 : 0]$, temos que $T(0,1)$ é múltiplo do vector $(1,0)$. Assim, T é definida por uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

com $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$. Como

$$\tau(P_2) = \tau([1 : 1]) = [0 : 1],$$

temos que $T(1,1)$ é múltiplo de $(0,1)$, pelo que podemos ter, por exemplo,

$$a + b = 0 \quad \text{e} \quad a = 1,$$

ou seja $a = 1$ e $b = -1$. Assim τ é dada por

$$\tau([x_0 : x_1]) = [T(x_0, x_1)] = \left[\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \right] = [x_0 - x_1 : x_0].$$

NOTA 3.6.9. O conjunto das aplicações projectivas $\tau : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ com a operação de composição de aplicações forma um grupo designado por

$$PGL(V) = (\{\text{aplicações projectivas } \tau : \mathbb{P}(V) \to P(V)\}, \circ) \simeq GL(V)/\sim$$

onde se considera no grupo $GL(V)$ das aplicações lineares invertíveis de V a relação de equivalência definida por

$$T \sim T' \Leftrightarrow T = \alpha\, T' \quad \text{para algum escalar } \alpha \neq 0.$$

Com efeito, a composta de duas aplicações projectivas

$$\tau_1, \tau_2 : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$$

induzidas por duas aplicações lineares $T_1, T_2 : V \to V$ é uma aplicação projectiva (induzida pela aplicação linear $T_1 \circ T_2$). Além disso, a identidade é uma aplicação projectiva e qualquer aplicação projectiva induzida por

uma aplicação linear $T : V \to V$ é invertível e a sua inversa é a aplicação projectiva induzida por T^{-1}.

Os elementos de $PGL(V)$ designam-se por **projectividades**.

NOTA 3.6.10. Se $P \in \mathbb{P}(V)$ é um ponto fixo de uma projectividade $\tau : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$, então se $v \in V \setminus \{0\}$ é tal que $P = [v]$ e $T : V \to V$ é uma aplicação linear que induz τ, temos

$$\tau(P) = P \Leftrightarrow [T(v)] = [v] \Leftrightarrow T(v) = \alpha v$$

para algum escalar $\alpha \neq 0$. Conclui-se assim que P é um ponto fixo de τ se e só se v é um vector próprio de T.

EXEMPLO 3.6.11. Seja $\tau : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ uma projectividade de $\mathbb{P}^1$ diferente da identidade e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear que induz τ, definida, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$, por uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Os valores próprios de T são

$$\lambda = \frac{\operatorname{Tr}(A) \pm \sqrt{\operatorname{Tr}^2(A) - 4 \det A}}{2}.$$

- Se $\operatorname{Tr}^2(A) - 4 \det A < 0$, então τ não tem pontos fixos (pois A não tem valores próprios reais). Neste caso a projectividade diz-se **elíptica**.
- Se $\operatorname{Tr}^2(A) - 4 \det A = 0$, então τ tem um único ponto fixo. Com efeito, T tem um único valor próprio real λ e o espaço próprio que lhe está associado tem dimensão 1 (se tivesse dimensão 2 teríamos $T(v) = \lambda v$ para todo o $v \in \mathbb{R}^2$, pelo que T seria múltipla da identidade e τ seria a identidade). Neste caso a projectividade diz-se **parabólica**.
- Se $\operatorname{Tr}^2(A) - 4 \det A > 0$, então τ tem dois pontos fixos. Com efeito T tem dois valores próprios reais cujos espaços próprios têm dimensão 1, dando origem a dois pontos fixos de τ. Neste caso a projectividade diz-se **hiperbólica**.

EXEMPLO 3.6.12. Seja $\tau : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ uma projectividade de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ diferente da identidade induzida por uma aplicação linear $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$.

- Se T é diagonalizável, então tem dois valores próprios distintos (T não é múltipla da identidade) cujos espaços próprios têm dimensão

(complexa) 1. Então τ tem dois pontos fixos. Neste caso τ diz-se uma projectividade **hiperbólica**.

- Se T não é diagonalizável, então tem apenas um valor próprio (com multiplicidade 2) cujo espaço próprio tem dimensão (complexa) 1. Então τ tem um único pontos fixo. Neste caso τ diz-se uma projectividade **parabólica**.

EXEMPLO 3.6.13. Seja τ a projectividade de $\mathbb{P}^1$ (ou $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$) induzida pela aplicação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (ou $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$) definida, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{C}^2$), pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O polinómio característico de A é $(1-\lambda)^2$ pelo que T tem um único valor próprio $\lambda = 1$. O espaço próprio correspondente é $\mathcal{L}\{(1,0)\}$ e então τ tem um único ponto fixo: o ponto $[1:0]$.

3.7. A recta projectiva

Considere-se a recta projectiva $\mathbb{P}^1$. Dados quatro pontos $P, Q, R, S \in \mathbb{P}^1$ em que os três primeiros são distintos, existe uma única projectividade $\tau : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ tal que

$$\tau(P) = \infty = [1:0], \quad \tau(Q) = [0:1] \quad \text{e} \quad \tau(R) = [1:1]$$

(note que em $\mathbb{P}^1$ quaisquer três pontos distintos formam um referencial). Define-se **razão cruzada** $[P, Q; R, S]$ destes pontos como sendo o ponto

$$[P, Q; R, S] := \tau(S).$$

Note que

$$[P, Q; R, S] := \begin{cases} [1:0], & \text{se } S = P, \\ [0:1] & \text{se } S = Q, \\ [1:1], & \text{se } S = R. \end{cases}$$

EXEMPLO 3.7.1. Sejam $P = [2:3], Q = [1:2], R = [1:3], S = [2:5] \in \mathbb{P}^1$. A única projectividade $\tau' : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ tal que

$$\tau'([1:0]) = P, \quad \tau'([0:1]) = Q, \quad \tau'([1:1]) = R$$

é induzida por uma aplicação linear $T' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$, por uma matriz

$$\begin{bmatrix} 2a & b \\ 3a & 2b \end{bmatrix}$$

com $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como $\tau'([1:1]) = R$ temos, por exemplo, $a = -1$ e $b = 3$, pelo que τ' é induzida pela aplicação linear $T' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida pela matriz

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Então, a única projectividade $\tau : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ tal que

$$\tau(P) = [1:0], \quad \tau(Q) = [0:1], \quad \text{e} \quad \tau(R) = [1:1],$$

é $\tau = (\tau')^{-1}$, induzida pela aplicação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida pela matriz

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\tau(S) = \tau([2:5]) = [T(2,5)] = [3:4],$$

temos

$$[P, Q; R, S] = [3:4].$$

A razão cruzada permite saber se, dados dois conjuntos de quatro pontos em $\mathbb{P}^1$, existe uma projectividade que leva os pontos do primeiro conjunto nos pontos do segundo.

PROPOSIÇÃO 3.7.2. *Sejam P_1, P_2, P_3, P_4 quatro pontos de $\mathbb{P}^1$ em que os três primeiros são distintos e Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 quatro pontos de $\mathbb{P}^1$ em que os três primeiros são distintos. Então, existe uma projectividade $\tau : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ tal que $\tau(P_i) = Q_i$ com $i = 1, 2, 3, 4$, se e só se*

$$[P_1, P_2; P_3, P_4] = [Q_1, Q_2; Q_3, Q_4].$$

Demonstração: Se $\tau : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ é tal que $\tau(P_i) = Q_i$ para $i = 1, \ldots, 4$ e $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ é a única projectividade tal que

$$\phi(Q_1) = [1:0], \quad \phi(Q_2) = [0:1] \quad \text{e} \quad \phi(Q_3) = [1:1],$$

então

$$[Q_1, Q_2; Q_3, Q_4] = \phi(Q_4).$$

Por outro lado, $\phi \circ \tau : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ satisfaz

$$(\phi \circ \tau)(P_1) = [1:0], \quad (\phi \circ \tau)(P_2) = [0:1], \quad (\phi \circ \tau)(P_3) = [1:1],$$

pelo que

$$[P_1, P_2; P_3, P_4] = (\phi \circ \tau)(P_4) = \phi(\tau(P_4)) = \phi(Q_4) = [Q_1, Q_2; Q_3, Q_4].$$

Inversamente, considere-se novamente a projectividade $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ tal que

$$\phi(Q_1) = [1 : 0], \quad \phi(Q_2) = [0 : 1] \quad \text{e} \quad \phi(Q_3) = [1 : 1],$$

assim como a única projectividade $\psi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ tal que $\psi(P_i) = Q_i$ com $i = 1, 2, 3$ (dada pelo Teorema 3.6.7). Então

$$(\phi \circ \psi)(P_1) = [1 : 0], \quad (\phi \circ \psi)(P_2) = [0 : 1], \quad \text{e} \quad (\phi \circ \psi)(P_3) = [1 : 1],$$

pelo que

$$[P_1, P_2; P_3, P_4] = (\phi \circ \psi)(P_4).$$

Como, por outro lado,

$$[Q_1, Q_2; Q_3, Q_4] = \phi(Q_4),$$

temos que, se $[P_1, P_2; P_3, P_4] = [Q_1, Q_2; Q_3, Q_4]$, então $\psi(P_4) = Q_4$. Conclui-se assim que, neste caso, $\psi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ satisfaz $\psi(P_i) = Q_i$ para $i = 1, 2, 3, 4$. □

3.8. Exercícios

EXERCÍCIO 3.8.1. Diga quantos elementos distintos contém o seguinte conjunto de pontos de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}} := \mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$:

$$\{[\pi : 2\pi : 3\pi : \pi/2], [-i : -1 : 1 : i], [i : 0 : 0 : 0],$$
$$[9/15 : 6/5 : 9/5 : 3/10], [\sqrt{2} : 0 : 0 : 0], [1 : -i : i : -1]\}.$$

EXERCÍCIO 3.8.2. Em $\mathbb{P}^2$ escreva a equação da recta projectiva que passa por $[1 : 1 : 0]$ e $[2 : 0 : 7]$.

EXERCÍCIO 3.8.3. Determine o ponto de $\mathbb{P}^2$ onde a recta que passa em $[8 : -1 : 2]$ e $[1 : -2 : -1]$ intersecta a recta que passa em $[0 : 1 : -1]$ e $[2 : 3 : 1]$.

EXERCÍCIO 3.8.4. Em $\mathbb{P}^3$ dê um exemplo de duas rectas projectivas enviesadas (i.e. subespaços projectivos de dimensão 1 cuja intersecção é vazia).

EXERCÍCIO 3.8.5. Em $\mathbb{P}^2$ determine a expressão geral das rectas que passam pelo ponto $[0 : 1 : 2]$.

EXERCÍCIO 3.8.6. Em $\mathbb{P}^3$ considere os pontos

$$P = [1 : 1 : 0 : 0], \ Q = [1 : 0 : 0 : 0], \ R = [2 : 0 : 1 : 0] \quad \text{e} \quad S = [4 : 2 : 0 : 0].$$

Determine o subespaço projectivo gerado por P, Q, R e S e descreva-o por equações.

Exercício 3.8.7. Diga, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras:

a) O subespaço projectivo gerado por duas rectas projectivas tem no máximo dimensão 3.
b) Se o subespaço projectivo gerado por duas rectas projectivas distintas tem dimensão dois então as duas rectas são concorrentes
c) Se num espaço projectivo o subespaço gerado por dois planos tem dimensão 3 então existe uma recta comum aos dois planos.
d) Se V é um espaço vectorial de dimensão 4 então a intersecção de dois planos distintos de $\mathbb{P}(V)$ é uma recta.
e) Se $\dim V = 6$ então a intersecção de dois planos distintos de $\mathbb{P}(V)$ é uma recta.
f) Se $\dim V = 9$ então a intersecção de dois subespaços projectivos distintos de $\mathbb{P}(V)$ de dimensão 4 é sempre vazia.
g) Se $\dim V = 5$ dois planos projectivos têm sempre intersecção não vazia.
h) Se $\dim V = 7$ dois subespaços projectivos de dimensão 4 contêm sempre um plano comum.

Exercício 3.8.8. Diga, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras:

a) Dados três pontos em $\mathbb{P}^n$ existe exactamente um plano projectivo que os contém.
b) A intersecção de três planos distintos de $\mathbb{P}^3$ é sempre não vazia.
c) Três rectas num espaço projectivo que se intersectam duas a duas estão sempre contidas num mesmo plano projectivo.
d) Dadas duas rectas projectivas r, s de $\mathbb{P}^3$, qualquer plano de $\mathbb{P}^3$ contém uma recta que intersecta r e s.
e) Se ℓ e m são duas rectas enviesadas de $\mathbb{P}^3$ e $P \in \mathbb{P}^3 \setminus (\ell \cup m)$, então existe uma recta de $\mathbb{P}^3$ que passa em P e intersecta ℓ e m.

Exercício 3.8.9. Sejam E e F dois subespaços projectivos disjuntos dum espaço projectivo $\mathbb{P}(V)$ de dimensão n, tais que

$$\dim E + \dim F = n - 1.$$

Mostre que, dado um ponto $P \in \langle E, F\rangle \setminus (E \cup F)$, existe uma única recta projectiva que passa em P e intersecta E e F.

EXERCÍCIO 3.8.10. Mostre que, dadas três rectas de $\mathbb{P}^2$ concorrentes num ponto P, é possível escollher coordenadas de forma a que as rectas sejam definidas pelas equações $y = 0$, $z = 0$ e $y - z = 0$.

EXERCÍCIO 3.8.11. Seja l a recta projectiva de $\mathbb{P}^2$ definida por $x_0 = 0$ e m a recta que passa pelos pontos $P = [1 : 1 : 1]$ e $Q = [0 : -5 : 0]$.

a) Determine uma equação de m.
b) Descreva $l \cap m$.
c) Qual a forma geral da equação de uma recta n tal que $l \cap m \cap n \neq \varnothing$.
d) Determine, se existir, um referencial projectivo que inclua P e Q.

EXERCÍCIO 3.8.12. Considere os pontos

$$P = [1 : 0 : 1 : 1],\ Q_t = [1 : 0 : t - 1 : t^2 - 3],\ R_s = [1 : 0 : 1 : s + 3]$$

de $\mathbb{P}^3$, com $s, t \in \mathbb{R}$.

a) Para cada par (t, s) determine a dimensão do subespaço projectivo gerado por P, Q_t, R_s.
b) Determine equações que definam o subespaço projectivo $\langle P, Q_3, R_0 \rangle$.
c) Diga, justificando, se existe algum referencial projectivo que inclua os pontos P, Q_3 e R_0.
d) Diga, justificando, se existe algum plano que contenha todos os pontos P, Q_t, R_s.

EXERCÍCIO 3.8.13. Considere coordenadas homogéneas $[x_0 : x_1 : x_2]$ em $\mathbb{P}^2$ e o mergulho $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}^2$ definido por

$$\phi(x, y) = [1 : x : y].$$

Dada uma recta l de $\mathbb{R}^2$ definida por $ax + by + c = 0$, mostre que o subespaço projectivo gerado por $\phi(l)$ é a recta projectiva $\bar{l}$ definida pela equação $cx_0 + ax_1 + bx_2 = 0$.

EXERCÍCIO 3.8.14. Identificando $\mathbb{R}^3$ com a sua imagem em $\mathbb{P}^3$ através do mergulho

$$(x, y, z) \to [x : y : 1 : z]$$

diga quais são os pontos no infinito dos planos projectivos gerados pelas imagens dos planos de $\mathbb{R}^3$ de equações $x + 2y - z = 1$ e $2x + 4y - 2z = 6$. Qual o ponto no infinito da recta projectiva gerada pela imagem da recta de $\mathbb{R}^3$ que passa pelos pontos $(1, 1, 1)$ e $(3, 0, 1)$?

EXERCÍCIO 3.8.15. Considere coordenadas homogéneas $[x_0 : x_1 : x_2]$ em $\mathbb{P}^2$ e o mergulho $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}^2$ definido por

$$\phi(x, y) = [x : y : 1].$$

Seja $C \subset \mathbb{R}^2$ o conjunto

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\},$$

onde $f(x, y) = y^2 - x(x - 1)(x - 2)$. Determine um polinómio homogéneo[1] $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\phi(\mathbb{R}^2) \cap \widetilde{C} = \phi(C)$, onde

$$\widetilde{C} := \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 : \ F(x_0, x_1, x_2) = 0\}.$$

Quais os pontos de $\widetilde{C}$ no infinito?

EXERCÍCIO 3.8.16. Seja $\mathcal{H} \subset \mathbb{P}^n$ um hiperplano projectivo e P um ponto que não pertence a $\mathcal{H}$. Considere a aplicação

$$\pi : \mathbb{P}^n \setminus \{P\} \to \mathcal{H}$$

que a cada ponto $Q \neq P$ faz corresponder o único ponto $\pi(Q)$ em que a recta definida por P e Q intersecta $\mathcal{H}$ (π é designada por **projecção em $\mathcal{H}$ a partir de P**). Verifique que:

a) a restrição de π a $\mathcal{H}$ é a identidade;
b) se, com coordenadas $[x_0 : \cdots : x_n]$, se tem $P = [1 : 0 : \cdots : 0]$ e $\mathcal{H}$ definido por $x_0 = 0$, então

$$\pi([x_0 : x_1 : \cdots : x_n]) = [0 : x_1 : \cdots : x_n],$$

para todo o ponto de $\mathbb{P}^n \setminus P$.

EXERCÍCIO 3.8.17. Seja $\mathcal{H}$ o hiperplano de $\mathbb{P}^n$ definido por

$$2x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 0$$

e P o ponto $[1 : 3 : 0 : \cdots : 0]$. Determine a expressão geral da projecção em $\mathcal{H}$ a partir de P.

EXERCÍCIO 3.8.18. Diga, justificando se a seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) Qualquer transformação projectiva de $\mathbb{P}^2$ pode ser definida por uma matriz com determinante 1.

[1] Um polinómio diz-se homogéneo se todos os seus monómios têm o mesmo grau.

b) Duas transformações lineares representadas numa mesma base por duas matrizes com determinante igual a 1 e que induzem a mesma transformação projectiva de $\mathbb{P}^2$ são iguais.
c) Qualquer matriz real $(n+1)\times(n+1)$ define uma transformação projectiva de $\mathbb{P}^n$.

EXERCÍCIO 3.8.19. Considerando o referencial projectivo canónico

$$P_0 = [1:0], \quad P_1 = [0:1], \quad P_2 = [1:1]$$

de $\mathbb{P}^1$ determine uma transformação projectiva $\tau : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ tal que

$$\tau(P_0) = P_2, \quad \tau(P_1) = P_0 \quad \text{e} \quad \tau(P_2) = P_1.$$

Quantas transformações projectivas satisfazem estas condições?

EXERCÍCIO 3.8.20. Determine a transformação projectiva $\tau : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tal que

$$\tau([1:0:0]) = [2:1:3], \quad \tau([0:1:0]) = [1:2:3],$$
$$\tau([0:0:1]) = [3:1:2] \quad \text{e} \quad \tau([1:1:1]) = [3:2:1].$$

EXERCÍCIO 3.8.21. Determine, se existirem, todas as transformações projectivas $\tau : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tais que

$$\tau([1:0:0]) = [0:0:1],\ \tau([0:1:0]) = [0:2:1],\ \tau(l) = m \quad \text{e} \quad \tau(m) = l,$$

onde l é a recta definida por $x_0 - x_1 = 0$ e m é a recta definida por $x_1 - x_2 = 0$.

EXERCÍCIO 3.8.22. Diga, justificando se a seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) Qualquer transformação projectiva de $\mathbb{P}^1$ tem pelo menos um ponto fixo.
b) Qualquer transformação projectiva de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ tem pelo menos um ponto fixo.
c) Uma transformação projectiva de $\mathbb{P}^1$ que fixa dois pontos é a identidade.
d) Uma transformação projectiva de $\mathbb{P}^1$ que fixa três pontos é a identidade.
e) Uma transformação projectiva de $\mathbb{P}^n$ que fixa $n+2$ pontos é a identidade.
f) Uma transformação projectiva de $\mathbb{P}^n$ que fixa os $n+2$ pontos de um referencial projectivo é a identidade.

EXERCÍCIO 3.8.23. Considere coordenadas homogéneas $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3]$ em $\mathbb{P}^3$ e o mergulho $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}^3$ definido por

$$\phi(x, y, z) = [x : y : z : 1].$$

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação afim definida por

$$T(x, y, z) = (-x,\, 3 - y,\, 5 - z)\,.$$

a) Indique uma transformação projectiva $\tau : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ tal que

$$\tau[x_0 : x_1 : x_2 : 1] = \phi(T(x_0, x_1, x_2)).$$

b) Quais os pontos fixos de τ?
c) Indique um plano projectivo $\mathcal{F} \subset \mathbb{P}^3$ tal que $\tau(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ e $[0 : 0 : 0 : 1] \in \mathcal{F}$.

EXERCÍCIO 3.8.24. Seja $\tau : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ a transformação projectiva definida por $\tau([x_0 : x_1 : x_2]) = [x_0 + x_2 : 2x_1 + x_2 : 3x_2]$.

a) Determine os pontos fixos de τ.
b) Considere o mergulho $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}^2$ definido por $\phi(x, y) = [x : y : 1]$. Quais os pontos $P \in \mathbb{P}^2$ tais que $\tau(P) \notin \phi(\mathbb{R}^2)$ (i.e. tais que $\tau(P)$ é um ponto no infinito para este mergulho)?
c) Indique a transformação afim $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ obtida pela restrição de τ a $\phi(\mathbb{R}^2)$ (i.e. tal que $\phi \circ \varphi = \tau \circ \phi$).

EXERCÍCIO 3.8.25. Em $\mathbb{P}^1$ determine as razões cruzadas $[P, Q; R, S]$ e $[S, Q; P, R]$ dos pontos

$$P = [1 : 0], \quad Q = [0 : 1], \quad R = [2 : 1] \quad \text{e} \quad S = [1 : -2].$$

EXERCÍCIO 3.8.26. Seja $\tau : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ a projectividade definida por

$$\tau[x_0 : x_1] = [-x_1 : 2x_0 + 3x_1]$$

a) Determine os pontos fixos de τ.
b) Sendo A e B pontos fixos de τ e $P = [2 : 5]$, calcule as razões cruzadas $[A, B; P, \tau(P)]$.

EXERCÍCIO 3.8.27. Seja $\tau \neq id$ uma projectividade de $\mathbb{P}^1$ com dois pontos fixos distintos P e Q. Mostre que τ é uma involução (isto é $\tau^2 = id$) se e só se, para qualquer ponto $R \in \mathbb{P}^1 \setminus \{P, Q\}$, a razão cruzada $[P, Q; R, \tau(R)]$ é igual a $[-1 : 1]$.

EXERCÍCIO 3.8.28. Sejam P e Q dois pontos distintos de $\mathbb{P}^1$ e $\tau : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ uma projectividade tal que $\tau(P) = Q$ e $\tau(Q) = P$. Mostre que $\tau \circ \tau = Id$.

EXERCÍCIO 3.8.29. Mostre que qualquer transformação projectiva de $\mathbb{P}^1$ é a composta de duas involuções.

EXERCÍCIO 3.8.30. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) Se uma transformação projectiva $\tau : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ é tal que $\tau^2 = Id$ então necessariamente τ tem mais do que dois pontos fixos distintos.
b) Existem pontos $A, B, C, D \in \mathbb{P}^1$ (com os três primeiros distintos) e uma transformação projectiva $\tau : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ tal que
$$[A, B; C, D] \neq [\tau(A), \tau(B); \tau(C), \tau(D)].$$
c) Qualquer transformação projectiva de $\mathbb{P}^2$ que fixa os pontos $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$ e $[0 : 1 : 1]$ é necessariamente a identidade.

EXERCÍCIO 3.8.31. Seja $\tau : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ uma aplicação projectiva cujo conjunto de pontos fixos contém um plano projectivo $E \subset \mathbb{P}^3$ e um ponto $P \notin E$. Mostre que, dado um ponto $X \in \mathbb{P}^3$ qualquer, os pontos
$$X, \tau(X), \tau^2(X), \ldots, \tau^n(X), \ldots$$
são colineares.

EXERCÍCIO 3.8.32. Em $\mathbb{P}^2$ considere o ponto $P := [1 : 0 : 0]$ e a recta projectiva ℓ de equação $x_0 = 0$. Seja G o grupo de aplicações projectivas $\tau : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tais que $\tau(P) = P \quad \text{e} \quad \tau(\ell) = \ell$.

a) Dê um exemplo de um elemento de G diferente da identidade que fixe os pontos de ℓ.
b) Dê um exemplo de um elemento de G com apenas dois pontos fixos.

EXERCÍCIO 3.8.33. Sejam A, A', B, B' quatro pontos distintos não colineares de $\mathbb{P}^2$ e $\tau : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ uma aplicação projectiva tal que
$$\tau(A) = B, \quad \tau(A') = B' \quad \text{e} \quad \tau^2 = id.$$

a) Quais as imagens $\tau(\ell)$, $\tau(m)$ e $\tau(X)$, onde ℓ e m são as rectas projectivas $\ell = \langle A, B \rangle$ e $m = \langle A', B' \rangle$, e $X = \ell \cap m$?
b) Mostre que A, A', B, B' formam um referencial projectivo se e só se existe uma aplicação projectiva τ que satisfaz as condições acima.

EXERCÍCIO 3.8.34. Dados dois planos projectivos E_1 e E_2 num espaço projectivo $\mathbb{P}(V)$ de dimensão 3 e um ponto $P \notin E_1 \cup E_2$, chama-se **projecção** de E_1 em E_2 **de centro** P à aplicação projectiva
$$\pi_{P,E_1,E_2} : E_1 \to E_2,$$
que a cada ponto $X \in E_1$ faz corresponder o ponto de intersecção de E_2 com a recta projectiva que passa em P e X. Considere dois planos projectivos distintos E e F de $\mathbb{P}(V)$ e a aplicação projectiva $\tau : E \to E$ definida por
$$\tau = \pi_{Q,F,E} \circ \pi_{P,E,F},$$

onde $P, Q \notin (E \cup F)$.

a) Mostre que τ tem uma recta projectiva ℓ de pontos fixos.
b) Quando é que τ tem um ponto fixo adicional $R \notin \ell$.
c) Nas condições da alínea anterior, mostre que τ deixa invariantes todas as rectas projectivas de E que passam em R.

EXERCÍCIO 3.8.35. Dadas duas rectas projectivas $l_1, l_2 \subset \mathbb{P}^2$ chama-se **perspectividade** de centro no ponto $P \in \mathbb{P}^2 \setminus (l_1 \cup l_2)$ à transformação projectiva $f_{P,l_1,l_2} : l_1 \to l_2$ que, a cada ponto $X \in l_1$, faz corresponder o ponto de intersecção da recta $\langle P, X\rangle$ com a recta l_2. Mostre que qualquer transformação projectiva $\tau : l_1 \to l_1$ com um ponto fixo pode ser obtida como a composta de duas perspectividades.

EXERCÍCIO 3.8.36. Escreva e demonstre o teorema dual do seguinte resultado:

Sejam l, m, n três rectas de $\mathbb{P}^4$ enviesadas duas a duas e não contidas num mesmo hiperplano. Então existe uma recta que intersecta l, m e n.

EXERCÍCIO 3.8.37. Considere a afirmação

Dois planos em $\mathbb{P}^4$ têm pelo menos um ponto em comum.

Diga, justificando, se esta afirmação é verdadeira ou falsa e escreva o seu dual.

EXERCÍCIO 3.8.38. Considere o seguinte teorema:

Três rectas distintas de $\mathbb{P}^3$ que se intersectam duas a duas, e não são as três concorrentes num mesmo ponto, são coplanares.

a) Escreva o teorema dual.
b) Como se pode generalizar a $\mathbb{P}^n$?

EXERCÍCIO 3.8.39. (**Teorema de Pappus**) Dadas duas rectas r e r' de $\mathbb{P}^2$, considere três pontos distintos P, Q, R de r e três pontos distintos P', Q', R' de r', tais que nenhum desses pontos é o ponto $r \cap r'$. Sejam A, B, C os pontos de $\mathbb{P}^2$ definidos por

$$A := \langle P, R'\rangle \cap \langle P', R\rangle, \quad B := \langle P, Q'\rangle \cap \langle P', Q\rangle \quad \text{e} \quad C := \langle Q, R'\rangle \cap \langle Q', R\rangle$$

a) Justifique que os pontos P, Q, P', Q' formam um referencial projectivo de $\mathbb{P}^2$.
b) Considere a aplicação projectiva $\tau : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tal que

$$\tau(P) = [1 : 0 : 0], \ \ \tau(Q) = [0 : 1 : 0], \ \ \tau(P') = [0 : 0 : 1] \ \text{ e } \ \tau(Q') = [1 : 1 : 1].$$

Determine as equações das rectas projectivas $\tau(\langle P, R'\rangle)$ e $\tau(\langle P', R\rangle)$ e as coordenadas do ponto $\tau(A)$. Quais as possíveis coordenadas dos pontos $\tau(Q)$ e $\tau(Q')$?

c) Mostre que os pontos A, B e C são colineares.

d) Enuncie o teorema dual do resultado anterior.

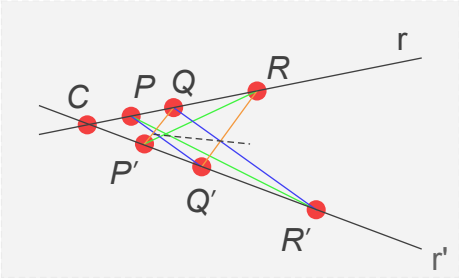

FIGURA 3.5. Teorema de Pappus

EXERCÍCIO 3.8.40. (**Teorema de Desargues**) Dados três pontos P, Q, R não colineares de $\mathbb{P}^2$, chama-se triângulo de vértices P, Q, R à união das três rectas $\langle P, Q\rangle$, $\langle P, R\rangle$, e $\langle Q, R'\rangle$. Diz-se que dois triângulos de vértices P, Q, R e P', Q', R' respectivamente estão em **perspectiva a partir de um ponto** C não pertencente aos triângulos, se C, P, P' são colineares, assim como C, Q, Q' e C, R, R'.

a) Mostre que dados dois triângulos de vértices P, Q, R e P', Q', R', em perspectiva a partir de um ponto C, os pontos P, Q, R e C formam um referencial projectivo de $\mathbb{P}^2$.

b) Demonstre o Teorema de Desargues:

Se dois triângulos de vértices P, Q, R e P', Q', R' estão em perspectiva a partir de um ponto C não pertencente aos triângulos, então os pontos

$$X := \langle P, Q\rangle \cap \langle P', Q'\rangle, \quad Y := \langle P, R\rangle \cap \langle P',\ R'\rangle \quad e \quad Z := \langle Q, R\rangle \cap \langle Q', R'\rangle$$

são colineares.

c) Enuncie o teorema dual do Teorema de Desargues.

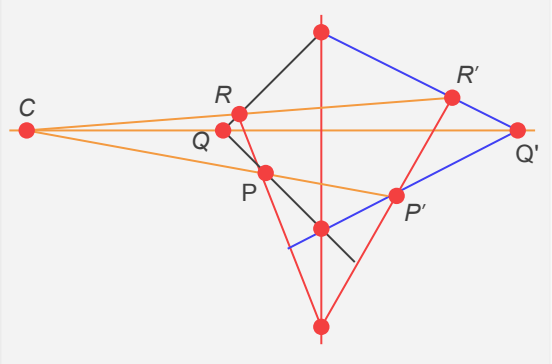

FIGURA 3.6. Teorema de Desargues

CAPÍTULO 4

Geometria Elíptica

Neste capítulo vamos ver exemplos de geometrias não euclidianas. Restringindo a dimensão 2 estudamos três exemplos: a esfera, o plano elíptico e a esfera de Riemann. Em todos estes exemplos não existem rectas paralelas pois quaisquer duas rectas se intersectam em pelo menos um ponto.

4.1. A esfera S^2

Nesta secção vamos considerar a superfície esférica unitária em $\mathbb{R}^3$,

$$S^2 := \{P \in \mathbb{R}^3 : d_{\mathbb{R}^3}(X, 0) = 1\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

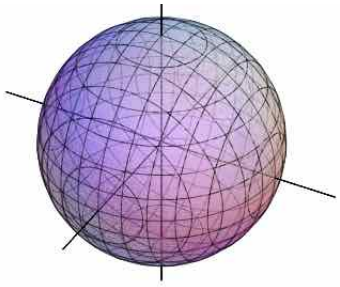

FIGURA 4.1. A esfera S^2.

Dados dois pontos $P, Q \in S^2$, define-se a distância entre P e Q como sendo o ângulo entre os vectores $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$.

DEFINIÇÃO 4.1.1. *Sejam $P, Q \in S^2$. A **distância esférica** entre P e Q é dada por*

$$d_{S^2}(P,Q) := \measuredangle(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) = \arccos\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\rangle \in [0,\pi].$$

NOTA 4.1.2. Para $P, Q \in S^2$ temos $\|\overrightarrow{OP}\| = \|\overrightarrow{OQ}\| = 1$.

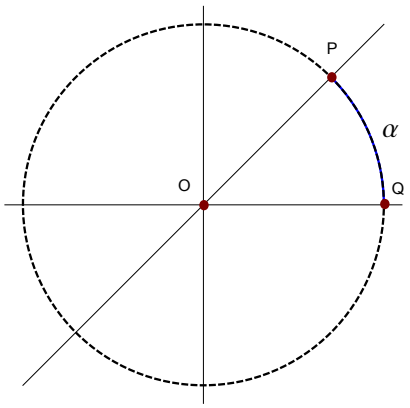

FIGURA 4.2. Distância esférica $d_{S^2}(P,Q) := \alpha$.

A distância esférica satisfaz as seguintes propriedades.

PROPOSIÇÃO 4.1.3. *Se P, Q e R são pontos de S^2 então*

(i) $d_{S^2}(P,Q) \geq 0$;
(ii) $d_{S^2}(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$;
(iii) $d_{S^2}(P,Q) = d_{S^2}(Q,P)$;
(iv) $d_{S^2}(P,R) \leq d_{S^2}(P,Q) + d_{S^2}(Q,R)$ *(**desigualdade triangular**).*

Demonstração:

- (i) - (iii): Trivial.
- (iv): Sejam $P, Q, R \in S^2$. Então, escrevendo

$$p := d_{S^2}(Q,R), \quad q := d_{S^2}(P,R) \quad \text{e} \quad r := d_{S^2}(P,Q),$$

temos

$$\cos p = \langle \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}\rangle, \quad \cos q = \langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OR}\rangle, \quad \cos r = \langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\rangle$$

e

$$\sin p = \sqrt{1 - \langle \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}\rangle^2} = \|\overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OR}\|, \quad \sin q = \|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OR}\|$$
$$\sin r = \|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}\|,$$

pois, dados quaisquer vectores $u, v, w, z \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\langle u \times v, w \times z\rangle = \langle u, w\rangle\langle v, z\rangle - \langle v, w\rangle\langle u, z\rangle. \tag{4.1.1}$$

Então,

$$\begin{aligned}\sin p \sin q &= \|\overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OR}\|\|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OR}\| \geq |\langle \overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OR}\rangle| \\ &= |\langle \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OP}\rangle\langle \overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OR}\rangle - \langle \overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OP}\rangle\langle \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}\rangle| \\ &= |\cos r - \cos q \cos p| \geq \cos r - \cos q \cos p,\end{aligned}$$

pelo que

$$\cos r \leq \cos q \cos p + \sin q \sin p = \cos(q - p).$$

Se $0 \leq q - p \leq \pi$, temos $r \geq q - p$ pois a função coseno é decrescente em $[0, \pi]$. Se $q - p < 0$ então temos trivialmente

$$q < p < p + r.$$

Como $q - p \leq \pi$ pois $p, q \in [0, \pi]$, conclui-se que $q \leq p + r$ em todos os casos. □

Como os pontos de S^2 estão em $\mathbb{R}^3$ podemos também considerar a distância euclidiana $d_{\mathbb{R}^3}(P, Q)$ entre dois pontos $P, Q \in S^2$. As duas distâncias estão relacionadas pela seguinte igualdade (ver Figura 4.3).

PROPOSIÇÃO 4.1.4. *Sejam P, Q dois pontos de S^2. Então*

$$d_{S^2}(P, Q) = 2 \arcsin\left(\frac{1}{2}\, d_{\mathbb{R}^3}(P, Q)\right).$$

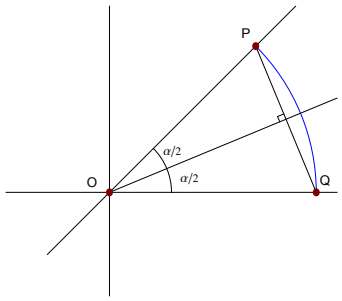

FIGURA 4.3. Distância esférica e distância euclidiana.

NOTA 4.1.5. Como consequência da Proposição 4.1.4, pontos equidistantes para a distância esférica são também equidistantes para a distância euclidiana em $\mathbb{R}^3$. Em particular, para quaisquer pontos $P, Q, P', Q' \in S^2$ temos

$$d_{S^2}(P,Q) = d_{S^2}(P',Q') \Leftrightarrow d_{\mathbb{R}^3}(P,Q) = d_{\mathbb{R}^3}(P',Q').$$

Vejamos agora como definir rectas em S^2. Em $\mathbb{R}^2$ vimos que uma recta podia ser vista como o conjunto dos pontos equidistantes de dois pontos de $\mathbb{R}^2$. Vamos então definir rectas em S^2 como sendo conjuntos de pontos equidistantes de dois pontos de S^2.

Dados dois pontos $P, Q \in S^2$ o conjunto ℓ de pontos de S^2 equidistantes de P e Q está contido no plano $\mathcal{H}$ de pontos de $\mathbb{R}^3$ equidistantes de P e Q para a distância euclidiana. Com efeito, pela Proposição 4.1.4 temos

$$d_{S^2}(X,P) = d_{S^2}(X,Q) \Leftrightarrow d_{\mathbb{R}^3}(X,P) = d_{\mathbb{R}^3}(X,Q).$$

Assim, como $O \in \mathcal{H}$ (pois $d_{\mathbb{R}^3}(O,P) = d_{\mathbb{R}^3}(O,Q) = 1$), temos que $\ell = \mathcal{H} \cap S^2$ é um círculo máximo[1] de S^2.

DEFINIÇÃO 4.1.6. *As **rectas** (esféricas) de S^2 são os círculos máximos de S^2.*

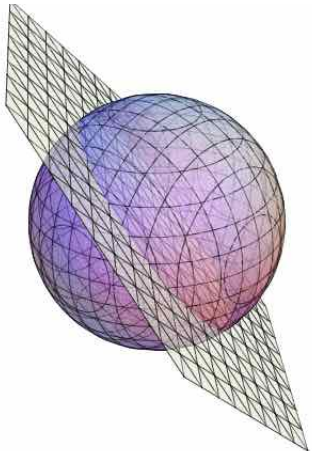

FIGURA 4.4. Intersecção da esfera com um plano que passa na origem.

[1]Um círculo máximo de S^2 é a intersecção de S^2 com um plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem (ver Figura 4.4).

Chamamos **reflexão** na recta (esférica) ℓ à restrição a S^2 da reflexão no plano $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^3$ tal que $S^2 \cap \mathcal{H} = \ell$, isto é

$$R_\ell := R_{\mathcal{H}}|_{S^2}.$$

Como uma reflexão num plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem é uma isometria de $\mathbb{R}^3$ que leva a esfera na esfera, temos, pela Proposição 4.1.4, que as reflexões em rectas esféricas são isometrias de S^2. Analogamente, podemos concluir que qualquer restrição a S^2 de uma isometria de $\mathbb{R}^3$ que leva S^2 em S^2 é uma isometria de S^2.

Vejamos agora que qualquer isometria de S^2 (para a distância esférica) é a restrição a S^2 de uma isometria de $\mathbb{R}^3$ que leva S^2 em S^2, o que nos permite concluir que as isometrias de S^2 são exactamente as restrições a S^2 de isometrias de $\mathbb{R}^3$ que levam a esfera na esfera.

TEOREMA 4.1.7. *Qualquer isometria de S^2 é a composta de uma, duas ou três reflexões em rectas de S^2.*

Demonstração: Como qualquer ponto de $\mathbb{R}^3$ fica univocamente determinado pela sua distância a quatro pontos O, P_1, P_2, P_3 não coplanares, temos que qualquer ponto $X \in S^2$ fica completamente determinado pela sua distância esférica a três pontos P_1, P_2, P_3 em S^2 não colineares (i.e que não estejam num mesmo círculo máximo de S^2), pois $d_{\mathbb{R}^3}(X, O) = 1$. Assim, se uma isometria de S^2 fixa três pontos não colineares é necessariamente a identidade.

Seja $f : S^2 \to S^2$ uma isometria diferente da identidade e $P_1, P_2, P_3 \in S^2$ três pontos distintos não colineares. Então $f(P_i) \neq P_i$ para pelo menos um $i \in \{1, 2, 3\}$. Supondo que $f(P_1) \neq P_1$, consideremos a reflexão R_ℓ em que ℓ é a recta (esférica) dos pontos equidistantes de P_1 e $f(P_1)$. Note que $f(P_1) = R_\ell(P_1)$.

Se $R_\ell(P_2) = f(P_2)$ e $R_\ell(P_3) = f(P_3)$ então $f = R_\ell$ pois $R_\ell \circ f$ fixa três pontos não colineares pelo que é a identidade.

Caso contrário, podemos supor que $f(P_2) \neq R_\ell(P_2)$ e consideramos R_m onde m é a recta de pontos equidistantes de $f(P_2)$ e $R_\ell(P_2)$. Então

$$(R_m \circ R_\ell)(P_2) = f(P_2) \quad \text{e} \quad (R_m \circ R_\ell)(P_1) = f(P_1)$$

pois

$$d_{S^2}(R_\ell(P_1), f(P_2)) = d_{S^2}(f(P_1), f(P_2)) = d_{S^2}(P_1, P_2) = d_{S^2}(R_\ell(P_1), R_\ell(P_2))$$

pelo que $R_\ell(P_1) \in m$.

Se $(R_m \circ R_\ell)(P_3) = f(P_3)$ então $f = R_m \circ R_\ell$ pois $(R_m \circ R_\ell)^{-1} \circ f$ fixa três pontos não colineares de S^2 pelo que é a identidade.

Caso contrário, consideramos R_n onde n é a recta de pontos equidistantes de $f(P_3)$ e $(R_m \circ R_\ell)(P_2)$. Então

$$(R_n \circ R_m \circ R_\ell)(P_3) = f(P_3), \quad (R_n \circ R_m \circ R_\ell)(P_1) = f(P_1)$$

e

$$(R_n \circ R_m \circ R_\ell)(P_3) = f(P_3)$$

pois

$$\begin{aligned} d_{S^2}((R_m \circ R_\ell)(P_i), f(P_3)) &= d_{S^2}(f(P_i), f(P_3)) = d_{S^2}(P_i, P_3) \\ &= d_{S^2}((R_m \circ R_\ell)(P_i), (R_m \circ R_\ell)(P_3)) \end{aligned}$$

para $i = 1, 2$, pelo que $(R_m \circ R_\ell)(P_1) \in n$ e $(R_m \circ R_\ell)(P_2) \in n$. Conclui-se assim que, neste último caso, temos $f = R_n \circ R_m \circ R_\ell$. □

Conclui-se assim que as isometrias de S^2 para a distância esférica são de facto as restrições a S^2 de isometrias de $\mathbb{R}^3$ que levam a esfera na esfera. Pela classificação das isometrias de $\mathbb{R}^3$, estas só podem ser de um dos seguintes tipos:

(i) reflexão num plano que passa na origem;
(ii) rotação em torno de um eixo que passa na origem;
(iii) reflexão com rotação num plano que passa na origem e num eixo (perpendicular ao plano) que passa na origem.

Estas isometrias de $\mathbb{R}^3$ fixam sempre a origem (i.e. $f(0) = 0$) pelo que, sendo aplicações afins, são lineares. São assim transformações ortogonais e formam o grupo $O(3)$. Assim. temos que o grupo $Iso(S^2)$ das isometrias de S^2 (gerado pelas reflexões em rectas de S^2) pode ser identificado com $O(3)$,

$$Iso(S^2) \simeq O(3) \simeq \{A \in M_{3\times 3} : A^T A = Id\}.$$

NOTA 4.1.8. Como qualquer elemento f de $O(3)$ satisfaz $f(S^2) = S^2$, temos $O(3) \subseteq Iso(S^2)$ e, como o grupo $O(3)$ contém todas as reflexões de $\mathbb{R}^3$ em planos que passam na origem, temos $Iso(S^2) \subseteq O(3)$.

EXEMPLO 4.1.9. A composição $R_\ell \circ R_m$ de duas reflexões é a restrição a S^2 da composição de duas reflexões de $\mathbb{R}^3$ em planos que passam na origem. Como os dois planos de reflexão correspondentes se intersectam, sabemos que a composição é uma rotação em torno da recta de intersecção dos dois planos. Esta recta intersecta a esfera em dois pontos antípodas $\pm P \in S^2$

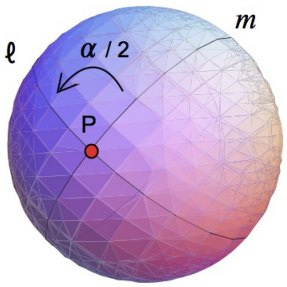

FIGURA 4.5. Composição de duas reflexões.

Assim, designando por $\rho_{P,\alpha}$ a restrição a S^2 da rotação, temos

$$R_\ell \circ R_m = \rho_{P,\alpha},$$

onde $\alpha/2$ é o ângulo orientado entre m e ℓ (i.e. o ângulo orientado entre os planos de $\mathbb{R}^3$ correspondentes, de acordo com o sentido da rotação) e $\{\pm P\} = \ell \cap m$ (ver Figura 4.5).

EXEMPLO 4.1.10. A composição $R_\ell \circ R_m \circ R_n$ de três reflexões em rectas ℓ, m, n tais que $\ell \cap m \cap n = \{\pm P\}$ é a restrição a S^2 da composição de três reflexões de $\mathbb{R}^3$ em planos que se intersectam numa recta que passa na origem. Como

$$R_m \circ R_n = \rho_{P,\alpha} = R_\ell \circ R_{n\prime}$$

onde $\alpha/2$ é o ângulo orientado entre n e m e n' é a recta de S^2 que faz um ângulo $\alpha/2$ com ℓ, temos que

$$R_\ell \circ R_m \circ R_n = R_\ell \circ R_\ell \circ R_{n'} = R_{n'}$$

é a reflexão na recta n'.

EXEMPLO 4.1.11. Consideremos agora a composição $R_\ell \circ R_m \circ R_n$ de três reflexões em rectas ℓ, m, n que se intersectam duas a duas. Podemos considerar, sem perda de generalidade, que m é perpendicular a ℓ e n. Com efeito, sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ os planos de $\mathbb{R}^3$ que passam na origem e que intersectam S^2 respectivamente nas rectas ℓ, m e n. Sejam r_{ij} as rectas

$$r_{ij} = \mathcal{H}_i \cap \mathcal{H}_j$$

e P_{ij} os pontos de S^2 tais que

$$r_{ij} \cap S^2 = \{\pm P_{ij}\}.$$

A isometria $R_m \circ R_n$ é a restrição a S^2 de uma rotação de $\mathbb{R}^3$ em torno da recta r_{23} (i.e. $R_m \circ R_n = \rho_{P_{23},2\alpha}$ onde $\alpha = \measuredangle_{or}(\mathcal{H}_3, \mathcal{H}_2) \in [0, \pi[$).

Se m não é perpendicular a ℓ, rodando os planos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_3$ em torno da recta r_{23} mantendo o ângulo entre eles, podemos escrever

$$\rho_{P_{23},2\alpha} = R_{m'} \circ R_{n'}$$

onde m' é a intersecção de S^2 com o plano $\mathcal{H}'_2$ de $\mathbb{R}^3$ gerado pelo eixo de $\mathcal{H}_1$ que passa na origem e pela recta r_{23}, e n' é a intersecção de S^2 com o plano $\mathcal{H}'_3$ tal que $\measuredangle_{or}(\mathcal{H}'_3, \mathcal{H}'_2) = \alpha$.

Então

$$R_\ell \circ R_m \circ R_n = R_\ell \circ R_{m'} \circ R_{n'}$$

com m' perpendicular a ℓ. Seja r'_{12} a recta

$$r'_{12} := \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}'_2$$

(note que os planos $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}'_2$ são perpendiculares) e P'_{12} o ponto de S^2 tal que

$$\{\pm P'_{12}\} = S^2 \cap r'_{12}.$$

Se m' não é perpendicular a n' então, rodando os planos $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}'_2$ em torno da sua recta de intersecção r'_{12}, mantendo o ângulo entre eles, podemos escrever

$$\rho_{P'_{12},\pi} = R_\ell \circ R_{m'} = R_{\ell'} \circ R_{m''},$$

onde m'' é a intersecção de S^2 com o plano $\mathcal{H}''_2$ de $\mathbb{R}^3$ gerado pelo eixo de $\mathcal{H}'_3$ que passa na origem e pela recta r'_{12}, e ℓ' é a intersecção de S^2 com o plano $\mathcal{H}'_1$ que passa na origem e é perpendicular a $\mathcal{H}''_2$. Note que $\mathcal{H}''_2$ é perpendicular a $\mathcal{H}'_1$ e a $\mathcal{H}'_3$ e que, consequentemente, m'' é perpendicular a ℓ' e a n'. Além disso,

$$R_\ell \circ R_m \circ R_n = R_{\ell'} \circ R_{m''} \circ R_{n'}.$$

Podemos então supor que temos $R_\ell \circ R_m \circ R_n$ com m perpendicular a ℓ e n. Como R_ℓ e R_m são restrições a S^2 de reflexões de $\mathbb{R}^3$ em planos perpendiculares, comutam entre si e então

$$R_\ell \circ R_m \circ R_n = R_m \circ R_\ell \circ R_n = R_m \circ \rho_{P,2\beta}, \tag{4.1.2}$$

onde $P \in S^2$ é tal que

$$\{\pm P\} = \ell \cap n \quad \text{e} \quad \beta = \measuredangle_{or}(n, \ell).$$

Os planos $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3$ de R^3 que intersectam S^2 em ℓ e n respectivamente são ambos perpendiculares ao plano $\mathcal{H}_2$ que intersecta S^2 em m. Então $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_3$

é uma recta perpendicular a $\mathcal{H}_2$, pelo que a isometria em (4.1.2) é uma reflexão com rotação.

EXEMPLO 4.1.12. A composição $\rho_{P,\alpha} \circ \rho_{Q,\beta}$ de duas rotações em torno de pontos distintos é uma rotação. Com efeito, seja ℓ a recta de S^2 que passa pelos pontos P e Q e m e n as rectas tais que

$$\measuredangle_{or}(m,\ell) = \frac{\beta}{2}, \quad \measuredangle_{or}(\ell,n) = \frac{\alpha}{2}, \quad \ell \cap m = \{\pm Q\} \quad \text{e} \quad \ell \cap n = \{\pm P\},$$

onde os ângulos são orientados no sentido das rotações correspondentes. Então

$$\rho_{P,\alpha} \circ \rho_{Q,\beta} = (R_n \circ R_\ell) \circ (R_\ell \circ R_m) = R_n \circ R_m = \rho_{S,\gamma},$$

onde $S \in S^2$ é tal que $\{\pm S\} = n \cap m$ e $\gamma = 2\measuredangle_{or}(m,n)$ (ver Figura 4.6).

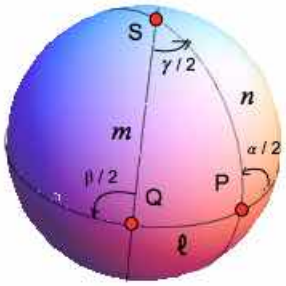

FIGURA 4.6. Composição de duas rotações com centros P e Q diferentes.

Em conclusão, as isometrias de S^2 podem ser dos seguintes três tipos:

(i) uma **reflexão** R_ℓ num círculo máximo $\ell \subset S^2$;
(ii) uma **rotação** $\rho_{P,\alpha}$ de um ângulo α em torno de um eixo de S^2 que passa em $\pm P$;
(iii) uma **reflexão com rotação** $R_\ell \circ \rho_{P,\alpha}$ em que o eixo de rotação é perpendicular ao plano de reflexão que contém ℓ.

Uma particularidade da geometria esférica é que a soma dos ângulos internos de um **triângulo esférico** (i.e. a região limitada por três rectas de S^2) é, ao contrário do que acontece na geometria euclidiana, maior do que π. Mais concretamente temos o seguinte resultado.

TEOREMA 4.1.13. *Seja Δ um triângulo de S^2 com ângulos internos α, β, γ. Então,*

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \textit{área}(\Delta)$$

Demonstração: Seja S_α um sector de ângulo α da superfíce esférica, i.e. a região de S^2 delimitada por dois planos de $\mathbb{R}^3$ que passam na origem e fazem um ângulo α entre si (ver Figura 4.7). Então a área de S_α é igual a

$$\text{área}(S_\alpha) = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 4\pi = 2\alpha.$$

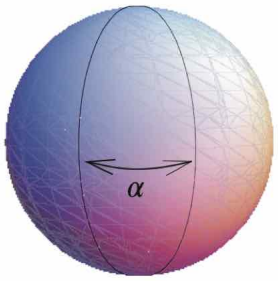

FIGURA 4.7. Sector de ângulo α.

Seja Δ_{ABC} um triângulo de S^2 com vérices A, B, C e com ângulos internos α, β e γ em A, B e C respectivamente. Considerando o hemisfério de S^2 formado pelos quatro triângulos

$$\Delta_{ABC}, \quad \Delta_{A(-B)C}, \quad \Delta_{(-A)(-B)C} \quad \text{e} \quad \Delta_{(-A)BC}$$

(ver Figura 5.1), temos

$$2\pi = \text{área}(\Delta_{ABC}) + \text{área}(\Delta_{A(-B)C}) + \text{área}((\Delta_{(-A)(-B)C}) + \text{área}(\Delta_{(-A)BC}).$$

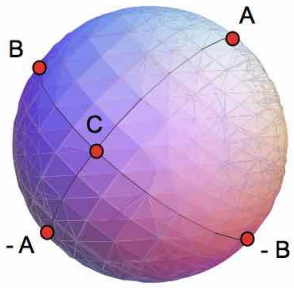

FIGURA 4.8. Os triângulos Δ_{ABC}, $\Delta_{A(-B)C}$, $\Delta_{(-A)(-B)C}$ e $\Delta_{(-A)BC}$.

Por outro lado, considerando os sectores S_A, S_B e S_C de ângulos α, β e γ e vértices $\pm A$, $\pm B$ e $\pm C$ respectivamente, temos

$$\begin{aligned}
\text{área}(S_A) &= 2\alpha = \text{área}(\Delta_{ABC}) + \text{área}(\Delta_{(-A)BC}) \\
\text{área}(S_B) &= 2\beta = \text{área}(\Delta_{ABC}) + \text{área}(\Delta_{A(-B)C}) \\
\text{área}(S_C) &= 2\gamma = \text{área}(\Delta_{ABC}) + \text{área}(\Delta_{AB(-C)}),
\end{aligned}$$

pelo que

$$2(\alpha + \beta + \gamma) = 2\text{área}(\Delta_{ABC}) + 2\pi.$$

Aqui usámos o facto de que a área de um triângulo Δ_{PQR} é igual à área do seu triângulo antípoda $\Delta_{(-P)(-Q)(-R)}$. Com efeito, a aplicação antípoda $f : S^2 \to S^2$ definida por

$$f(x, y, z) = (-x, -y, -z)$$

é uma isometria de S^2 (uma reflexão com rotação) pois, por exemplo, pode ser escrita como

$$f = \rho_{(0,0,1),\pi} \circ R_\ell$$

onde $R_\ell(x, y, z) = (x, y, -z)$ é a reflexão na recta obtida por intersecção de S^2 com o plano $z = 0$. □

4.2. O plano elíptico

Consideremos agora o o plano projectivo $\mathbb{P}^2 := \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$. Como este espaço é o conjunto dos subespaços de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 1, podemos pensar nele como o conjunto das rectas de $\mathbb{R}^3$ que passam na origem, onde cada uma destas rectas representa um ponto em $\mathbb{P}^2$ (correspondente ao espaço gerado por um vector director da recta).

NOTA 4.2.1. Como cada recta de $\mathbb{R}^3$ intersecta S^2 num par de pontos antípodas e, por cada par de pontos antípodas passa uma única recta de $\mathbb{R}^3$ (que passa obrigatoriamente na origem), obtemos a identificação

$$\mathbb{P}^2 \simeq S^2/\sim \tag{4.2.1}$$

onde consideramos em S^2 a relação de equivalência definida por

$$X \sim Y \Leftrightarrow X = \pm Y$$

com $-Y$ o ponto antípoda de Y.

Podemos então definir em $\mathbb{P}^2$ uma distância a partir da distância em S^2.

DEFINIÇÃO 4.2.2. *Dados dois pontos $P, Q \in \mathbb{P}^2$, sejam ℓ_P e ℓ_Q as rectas de $\mathbb{R}^3$ definidas por*

$$\ell_P = O + \mathcal{L}\{u\} \quad e \quad \ell_Q = O + \mathcal{L}\{v\},$$

*onde $u, v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ são tais que $P = [u]$ e $Q = [v]$. A **distância projectiva** em $\mathbb{P}^2$ é a aplicação $d_{\mathbb{P}^2} : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$d_{\mathbb{P}^2}(P, Q) = \measuredangle(\ell_P, \ell_Q) \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

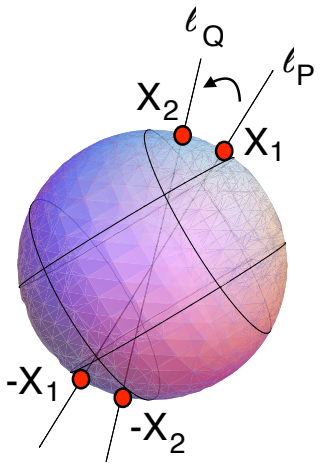

FIGURA 4.9. Distância projectiva $d_{\mathbb{P}^2}(P, Q)$.

NOTA 4.2.3. Se escolhermos vectores $u, v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tais que $P = [u]$ e $Q = [v]$ com $\|u\| = \|v\| = 1$, temos

$$d_{\mathbb{P}^2}(P, Q) = \arccos |\langle u, v \rangle|.$$

Neste caso os pontos $\pm X_1 := O \pm u$ e $\pm X_2 := O \pm v$ pertencem a S^2 (os pares $\{X_1, -X_1\}$ e $\{X_2, -X_2\}$ são pares de pontos antípodas) e

$$d_{\mathbb{P}^2}(P, Q) = \min \{d_{S^2}(X_1, X_2), d_{S^2}(X_1, -X_2)\}. \tag{4.2.2}$$

PROPOSIÇÃO 4.2.4. *A aplicação $d_{\mathbb{P}^2} : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $d_{\mathbb{P}^2}(P, Q) \geq 0$;
(ii) $d_{\mathbb{P}^2}(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$;
(iii) $d_{\mathbb{P}^2}(P, Q) = d_{\mathbb{P}^2}(Q, P)$;
(iv) $d_{\mathbb{P}^2}(P, R) \leq d_{\mathbb{P}^2}(P, Q) + d_{\mathbb{P}^2}(Q, R)$ (***desigualdade triangular***).

Demonstração:

- (i) - (iii): Trivial.
- (iv): Sejam $P, Q, R \in \mathbb{P}^2$ e $u, v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tais que
  - (i) $\|u\| = \|v\| = \|w\| = 1$;
  - (ii) $P = [u]$, $Q = [v]$ e $R = [w]$;
  - (iii) $\langle v, w\rangle \geq 0$ e $\langle u, w\rangle \geq 0$ (dado v podemos escolher o sentido de w de forma a ter $\langle v, w\rangle \geq 0$ e depois escolher um sentido para u tal que $\langle u, w\rangle \geq 0$).

Então

$$r := d_{\mathbb{P}^2}(P, Q) = \arccos |\langle u, v\rangle|,$$

pelo que

$$\cos r = |\langle u, v\rangle|$$

e

$$\sin^2 r = 1 - \langle u, v\rangle^2 = \|u \times v\|^2$$

pois, dados quaisquer vectores $u, v, w, z \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\langle u \times v, w \times z\rangle = \langle u, w\rangle\langle v, z\rangle - \langle v, w\rangle\langle u, z\rangle. \tag{4.2.3}$$

Concluímos assim que

$$\sin r = \|u \times v\|$$

pois, como $r \in [0, \frac{\pi}{2}]$, temos $\sin r > 0$.

Analogamente, para

$$p := d_{\mathbb{P}^2}(Q, R) = \arccos |\langle v, w\rangle|,$$

temos

$$\cos p = \langle v, w\rangle \tag{4.2.4}$$

(pois, por hipótese, $\langle v, w\rangle \geq 0$) e

$$\sin p = \|v \times w\|.$$

Para

$$q := d_{\mathbb{P}^2}(P, R) = \arccos |\langle u, w\rangle|,$$

temos

$$\cos q = \langle u, w\rangle \quad \text{e} \quad \sin q = \|u \times w\|. \tag{4.2.5}$$

Então

$$\begin{aligned} \sin p \sin r &= \|u \times v\|\|v \times w\| \geq |\langle u \times v, v \times w\rangle| \\ &= |\langle u, v\rangle\langle v, w\rangle - \langle v, v\rangle\langle u, w\rangle| = |\langle u, v\rangle \cos p - \cos q|, \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

onde usámos (4.2.4), (4.2.5) e (4.2.3).

Se $\langle u, v\rangle \geq 0$ temos

$$\sin p \sin r \geq \cos r \cos p - \cos q,$$

pelo que

$$\cos q \geq \cos r \cos p - \sin p \sin r = \cos(p + r)$$

e então $r + p \geq q$ (pois $q, r + p \in [0, \pi]$ e a aplicação $x \mapsto \cos x$ é decrescente neste intervalo).

Se $\langle u, v\rangle \leq 0$ temos

$$\sin p \sin r \geq |\langle u, v\rangle \cos p - \cos q| = |-\cos r \cos p - \cos q| = \cos r \cos p + \cos q,$$

pelo que

$$\cos(\pi - q) = -\cos q \geq \cos r \cos p - \sin p \sin r = \cos(p + r)$$

e então

$$p + r \geq \pi - q \geq q$$

pois $\pi - q, p + r \in [0, \pi]$. □

Proposição 4.2.5. *Três pontos de $\mathbb{P}^2$ são colineares se e só se podem ser designados por P, Q e R de forma a ter*

$$d_{\mathbb{P}^2}(P, Q) + d_{\mathbb{P}^2}(Q, R) = d_{\mathbb{P}^2}(P, R)$$

ou

$$d_{\mathbb{P}^2}(P, Q) + d_{\mathbb{P}^2}(Q, R) + d_{\mathbb{P}^2}(P, R) = \pi.$$

Demonstração: Usando a notação da demonstração da Proposição 4.2.4, para termos

$$r + p = q \quad \text{ou} \quad p + q + r = \pi$$

é necessário, por (4.2.6), que $[u \times v] = [v \times w]$, ou seja que u, v e w sejam coplanares e, consequentemente, que P, Q e R sejam colineares.

Inversamente, se P, Q e R são colineares, então u, v e w são coplanares e então em (4.2.6) temos

$$\sin p \sin r = \|u \times v\| \|v \times w\| = |\langle u \times v, v \times w\rangle| = |\langle u, v\rangle \cos p - \cos q|,$$

pelo que

$$\sin p \sin r = \pm (\cos r \cos p - \cos q) \quad \text{ou} \quad \sin p \sin r = \cos r \cos p + \cos q.$$

Assim,

$$\cos q = \cos r \cos p \pm \sin p \sin r = \cos(p \mp r)$$

ou

$$\cos(\pi - q) = -\cos q = \cos r \cos p - \sin p \sin r = \cos(p + r),$$

pelo que

$$q = p + r \quad \text{ou} \quad \pm q = p - r \quad \text{ou} \quad \pi - q = p + r.$$

□

DEFINIÇÃO 4.2.6. *O espaço projectivo $\mathbb{P}^2$ com a distância $d_{\mathbb{P}^2}$ é designado por* ***plano elíptico****.*

NOTA 4.2.7. É fácil verificar que o conjunto de pontos equidistantes de dois pontos no plano elíptico é a união de duas rectas projectivas (ver Exercício 4.4.18).

Vejamos quais as isometrias do plano elíptico. Como, por (4.2.1), podemos identificar pontos de $\mathbb{P}^2$ com pares de pontos antípodas de S^2, temos, por (4.2.2), que as aplicações projectvas induzidas pelas isometrias de S^2 que preservam pares de pontos antípodas são isometrias do plano elíptico. Como todas as isometrias de S^2 são restrições a S^2 de aplicações lineares de $\mathbb{R}^3$, temos

$$f(-X) = -f(X)$$

para qualquer $f \in Iso(S^2)$, pelo que qualquer isometria de S^2 induz uma isometria de $\mathbb{P}^2$.

Vejamos agora que todas as isometrias $\mathbb{P}^2$ são aplicações projectivas induzidas por isometrias de S^2. Para isso começamos por notar uma consequência imediata da Proposição 4.2.5.

PROPOSIÇÃO 4.2.8. *Sejam P, Q, R três pontos colineares de $\in \mathbb{P}^2$ e seja $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ uma isometria. Então os pontos $f(P)$, $f(Q)$ e $f(R)$ são colineares.*

Demonstração: Seja ℓ a recta projectiva que passa nos três pontos P, Q e R e seja S o único ponto de ℓ tal que $d_{\mathbb{P}^2}(P, S) = \frac{\pi}{2}$. Então temos sempre

$$d_{\mathbb{P}^2}(P, Q) + d_{\mathbb{P}^2}(Q, S) = d_{\mathbb{P}^2}(P, S) = \frac{\pi}{2},$$

e

$$d_{\mathbb{P}^2}(f(P), f(Q)) + d_{\mathbb{P}^2}(f(Q), f(S)) = \frac{\pi}{2} = d_{\mathbb{P}^2}(f(P), f(S)).$$

Pela Proposição 4.2.5, temos que o ponto $f(Q)$ pertence à recta projectiva que passa em $f(P)$ e $f(S)$. Analogamente, podemos concluir que $f(R)$ pertence também a essa recta, pelo que os três pontos $f(P)$, $f(Q)$ e $f(R)$ são colineares. □

Além disso, temos ainda o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 4.2.9. *Se uma uma isometria $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ fixa os quatro pontos de um referencial projectivo, então é a identidade.*

Demonstração: Considere-se uma base em $\mathbb{R}^3$ de forma a que as coordenadas homogéneas dos pontos do referencial projectivo sejam

$$P_1 = [1 : 0 : 0], \quad P_2 = [0 : 1 : 0], \quad P_3 = [0 : 0 : 1], \quad P_4 = [1 : 1 : 1].$$

Como f deixa invariante a recta projectiva de equação $x_2 = 0$ que passa em P_1 e P_2, temos que a imagem $f(X)$ de um ponto $X = [\cos t : \sin t : 0]$ (com $t \in]0, \pi[$) dessa recta é da forma

$$f([\cos t : \sin t : 0]) = [\cos \theta : \sin \theta : 0]$$

para algum $\theta \in]0, \pi[$. Então,

$$d_{\mathbb{P}^2}(f(P_1), f(X)) = d_{\mathbb{P}^2}(P_1, X) \Leftrightarrow |\cos t| = |\cos \theta| \Leftrightarrow t = \theta \text{ ou } t = \pi - \theta.$$

Se $t = \theta$ temos que f fixa o ponto X. Se $t = \pi - \theta$, temos

$$f([\cos t : \sin t : 0]) = [-\cos t : \sin t : 0]$$

e então

$$d_{\mathbb{P}^2}(f(P_4), f(X)) = d_{\mathbb{P}^2}(P_4, X) \Leftrightarrow |\frac{1}{\sqrt{3}}(\sin t - \cos t)| = |\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t + \sin t)|,$$

pelo que $t = \frac{\pi}{2} = \theta$. Conclui-se assim que f fixa todos os pontos da recta $x_2 = 0$.

Analogamente, podemos concluir que f fixa todos os pontos das rectas projectivas $\langle P_1, P_2 \rangle$, $\langle P_2, P_3 \rangle$ e $\langle P_1, P_3 \rangle$. Como qualquer recta projectiva intersecta estas três rectas em pelo menos dois pontos distintos, temos que qualquer recta projectiva ℓ de $\mathbb{P}^2$ contém pelo menos dois pontos fixos de f, pelo que f fixa todos os pontos de ℓ. Conclui-se assim que f fixa todos os pontos de $\mathbb{P}^2$, ou seja que é a identidade. □

Com estas duas proposição podemos finalmente caracterizar as isometrias do plano elíptico.

PROPOSIÇÃO 4.2.10. *Seja $\tau : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ uma isometria. Então τ é uma aplicação projectiva induzida por uma aplicação ortogonal de $\mathbb{R}^3$.*

Demonstração: Considere-se o referencial projectivo canónico

$$P_1 = [1:0:0], \quad P_2 = [0:1:0], \quad P_3 = [0:0:1], \quad P_4 = [1:1:1]$$

e vectores v_1, v_2, v_3 de $\mathbb{R}^3$ com $\|v_1\| = \|v_2\| = \|v_3\| = 1$, tais que

$$\tau(P_1) = [v_1], \quad \tau(P_2) = [v_2] \quad \text{e} \quad \tau(P_3) = [v_3].$$

Como, para $i, j \in \{1, 2, 3\}$, temos

$$d_{\mathbb{P}^2}(P_i, P_j) = d_{\mathbb{P}^2}(\tau(P_i), \tau(P_j)) \Leftrightarrow \arccos|\langle e_i, e_j\rangle| = \arccos|\langle v_i, v_j\rangle|,$$

onde $\{e_1, e_2, e_3\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$, conclui-se que

$$|\langle v_i, v_j\rangle| = |\langle e_i, e_j\rangle|,$$

ou seja que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$.

Seja $\widetilde{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação ortogonal que satisfaz $\widetilde{T}(e_i) = v_i$ para $i = 1, 2, 3$. Como a restricão desta aplicação a S^2 é uma isometria de S^2, temos que $\widetilde{T}$ induz uma isometria $\widetilde{\tau} : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ do plano elíptico. Além disso, para $i = 1, 2, 3$,

$$(\widetilde{\tau}^{-1} \circ \tau)(P_i) = \widetilde{\tau}^{-1}([v_i]) = [\widetilde{T}^{-1}(v_i)] = [e_i] = P_i,$$

pelo que $\widetilde{\tau}^{-1} \circ \tau$ fixa os pontos P_1, P_2 e P_3.

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$ e

$$(\widetilde{\tau}^{-1} \circ \tau)(P_4) = (\widetilde{\tau}^{-1} \circ \tau)([1:1:1]) = [\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3].$$

Como $\widetilde{\tau}^{-1} \circ \tau$ é uma isometria de $\mathbb{P}^2$, temos, para $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned}
&d_{\mathbb{P}^2}\left((\widetilde{\tau}^{-1} \circ \tau)(P_4), (\widetilde{\tau}^{-1} \circ \tau)(P_i)\right) = d_{\mathbb{P}^2}(P_4, P_i) \Leftrightarrow \\
&d_{\mathbb{P}^2}([\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3], P_i) = d_{\mathbb{P}^2}([1:1:1], P_i) \Leftrightarrow \\
&|\langle(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), e_i\rangle| = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow |\lambda_i| = \frac{1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Seja $\widehat{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação ortogonal que satisfaz $\widehat{T}(e_i) = \sqrt{3}\lambda_i e_i$ para $i = 1, 2, 3$ (note que os vectores $\sqrt{3}\lambda_1 e_1, \sqrt{3}\lambda_2 e_2$ e $\sqrt{3}\lambda_3 e_3$ formam uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$). Como a restricão desta aplicação a S^2 é uma isometria de S^2, temos que $\widehat{T}$ induz uma isometria $\widehat{\tau} : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ do plano elíptico. Além disso, para $i = 1, 2, 3$,

$$(\widehat{\tau}^{-1} \circ \widetilde{\tau}^{-1} \circ \tau)(P_i) = \widehat{\tau}^{-1}(P_i) = [\widehat{T}^{-1}(e_i)] = [\frac{1}{\sqrt{3}\lambda_i} e_i] = [e_i] = P_i$$

e

$$(\widehat{\tau}^{-1} \circ \widetilde{\tau}^{-1} \circ \tau)(P_4) = \widehat{\tau}^{-1}([\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3]) = [\widehat{T}^{-1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)]$$
$$= [(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})] = [1 : 1 : 1] = P_4.$$

Temos assim que $\widehat{\tau}^{-1} \circ \widetilde{\tau}^{-1} \circ \tau$ fixa os quatro pontos do referencial projectivo canónico, pelo que, pela Proposição 4.2.9, temos que $\widehat{\tau}^{-1} \circ \widetilde{\tau}^{-1} \circ \tau$ é a identidade. Consequentemente,

$$\tau = \widetilde{\tau} \circ \widehat{\tau}$$

é uma aplicação projectiva e é induzida pela aplicação ortogonal $\widetilde{T} \circ \widehat{T}$.

□

Conclui-se assim que as isometrias de $\mathbb{P}^2$ são exactamente as aplicações projectivas induzidas pelas isometrias de S^2:

(i) Se $f = R_\ell \in Iso(S^2)$ é uma reflexão num círculo máximo $\ell \subset S^2$ então a aplicação induzida por f em $\mathbb{P}^2$ fixa
- todos os pontos
$$[v] \in \mathbb{P}^2 \quad \text{tais que } O + v \in \ell \text{ e}$$
- o ponto $[w] \in \mathbb{P}^2$ tal que w é perpendicular ao plano $\mathcal{H}_\ell \subset \mathbb{R}^3$ que contém ℓ.

(ii) Se $f = \rho_{P,\alpha} \in Iso(S^2)$ é uma rotação de um ângulo α em torno de um eixo de S^2 que passa em $\pm P$ então, se
- $\alpha \neq \pi$, a aplicação induzida por f em $\mathbb{P}^2$ fixa apenas o ponto $[v] \in \mathbb{P}^2$ tal que $O + v = P$;
- $\alpha = \pi$, a aplicação induzida por f em $\mathbb{P}^2$ fixa o ponto $[v]$ e também todos os pontos $[w]$ para os quais $O + w$ pertence ao círculo máximo de S^2 perpendicular ao eixo de rotação.

(iii) Se $f = \rho_{P,\alpha} \circ R_\ell \in Iso(S^2)$ é uma reflexão com rotação (isto é, o eixo de rotação é perpendicular ao plano de reflexão que contém ℓ), então, se
- $\alpha \neq \pi$, a aplicação induzida por f em $\mathbb{P}^2$ fixa apenas o ponto $[v] \in \mathbb{P}^2$ tal que $O + v = P$;
- $\alpha = \pi$, a aplicação induzida por f em $\mathbb{P}^2$ fixa todos os pontos de $\mathbb{P}^2$, pelo que é a identidade (note que f é a restrição a S^2 da inversão na origem de $\mathbb{R}^3$). Com efeito, podemos supor, sem perda de generalidade, que ℓ é a intersecção de S^2 com o

plano de equação $z = 0$, pelo que $P = (0, 0, 1) \in S^2$,

$$R_\ell(x, y, z) = (x, y, -z) \quad \text{e} \quad \rho_{P,\pi}(x, y, z) = (-x, -y, z).$$

Assim,

$$(\rho_{P,\pi} \circ R_\ell)(x, y, z) = (-x, -y, -z),$$

pelo que

$$[(\rho_{P,\pi} \circ R_\ell)(x, y, z)] = [(-x, -y, -z)] = [(x, y, z)].$$

Uma reflexão $R_\ell \in Iso(S^2)$ induz a mesma isometria de $\mathbb{P}^2$ que uma rotação $\rho_{P,\pi}$ de ângulo π em torno de um eixo perpendicular ao plano de reflexão pois, como vimos atrás, temos que $\rho_{P,\pi} \circ R_\ell$ induz a identidade em $\mathbb{P}^2$. Com efeito, podemos assumir, sem perda de generalidade, que ℓ é a intersecção de S^2 com o plano de equação $z = 0$. Assim,

$$R_\ell(x, y, z) = (x, y, -z)$$

e então

$$\rho_{P,\pi}(x, y, z) = (-x, -y, z) = -R_\ell(x, y, z),$$

pelo que

$$[R_\ell(x, y, z)] = [\rho_{P,\pi}(x, y, z)].$$

Conclui-se assim que o grupo $Iso(\mathbb{P}^2)$ de isometrias de $\mathbb{P}^2$ é gerado pelas aplicações projectivas induzidas pelas rotações de S^2 (que, por sua vez, são a restrição a S^2 das rotações de $\mathbb{R}^3$ em torno de eixos que passam na origem), ou seja pelas isometrias directas de S^2:

$$Iso(\mathbb{P}^2) \simeq SO(3) = \{A \in O(3) : \det A = 1\}.$$

Os pontos fixos de uma isometria de $\mathbb{P}^2$ induzida por uma rotação $\rho_{P,\alpha}$ diferente da identidade são então

- se $\alpha \neq \pi$, o ponto $[w] \in \mathbb{P}^2$ tal que $O + w = P$;
- se $\alpha = \pi$, o ponto $[v] \in \mathbb{P}^2$ e a recta projectiva que corresponde aos pontos do círculo máximo de S^2 perpendicular ao eixo de rotação.

4.3. A esfera de Riemann

Considere-se agora a recta projectiva complexa

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} := \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \left\{[z_0 : z_1] : (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}\right\} = U_1 \sqcup H_1,$$

onde

$$U_1 = \{[z_0 : z_1] : \ z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\, z_0 \in \mathbb{C}\} = \{[\frac{z_0}{z_1} : 1] : \ z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\, z_0 \in \mathbb{C}\}$$
$$= \{[z_0 : 1] : z_0 \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C}$$

e

$$H_1 = \{[z_0 : 0] : \ z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\} = \{[1 : 0]\}\,.$$

Podemos estabelecer a seguinte correspondência entre $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ e a **esfera de Riemann**, $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{C}} \\ [z_0 : z_1] & \longmapsto & \begin{cases} \frac{z_0}{z_1}, & \text{se } z_1 \neq 0 \\ \\ \infty, & \text{se } z_1 = 0 \text{ (i.e. se } [z_0 : z_1] = [1 : 0]). \end{cases} \end{array} \tag{4.3.1}$$

Por outro lado, podemos também identificar $\overline{\mathbb{C}}$ com S^2 usando a projecção estereográfica a partir do polo norte $N := (0, 0, 1)$. Com efeito, dado um ponto $P := (x, y, z) \in S^2 \setminus \{N\}$, consideramos a recta que passa em P e em N, ou seja a recta cujos pontos são da forma

$$N + t\,\overrightarrow{NP} = N + t(P - N) = N + t(x, y, z-1) = (tx, ty, 1 + t(z-1))\,,\ t \in \mathbb{R}.$$

Esta recta intersecta o plano de $\mathbb{R}^3$ de equação $z = 0$ quando $1 + t(z-1) = 0$, ou seja quando $t = \frac{1}{1-z}$, pelo que o ponto de intersecção é

$$P' := \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0\right)$$

(ver Figura 4.10). Identificando o plano $z = 0$ com $\mathbb{R}^2$ obtemos uma bijecção, designada por **projecção estereográfica**:

$$\begin{array}{ccc} S^2 \setminus \{N\} & \xrightarrow{St_N} & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right). \end{array} \tag{4.3.2}$$

A inversa desta aplicação é

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{St_N^{-1}} & S^2 \setminus \{N\} \\ \\ (u, v) & \longmapsto & \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right). \end{array}$$

Com efeito, dado um ponto $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, tomamos o ponto correspondente $P' := (u, v, 0)$ no plano de $\mathbb{R}^3$ de equação $z = 0$ e consideramos a recta que

passa em N e em P', ou seja a recta cujos pontos são da forma

$$N + t\overrightarrow{NP'} = N + t(P' - N) = (tu, tv, 1 - t)\,.$$

Esta recta intersecta $S^2 \setminus \{N\}$ quando

$$(tu)^2 + (tv)^2 + (1-t)^2 = 1 \Leftrightarrow t = \frac{2}{1 + u^2 + v^2},$$

ou seja no ponto

$$P = \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right).$$

Identificando $\mathbb{R}^2$ com $\mathbb{C}$ (fazendo $z = x + iy \in \mathbb{C}$), a aplicação (4.3.2) é equivalente a

$$\begin{array}{ccc} S^2 \setminus \{N\} & \xrightarrow{St_N} & \mathbb{C} \\ (x,y,z) & \longmapsto & \frac{x}{1-z} + i\,\frac{y}{1-z} \end{array} \tag{4.3.3}$$

e a sua inversa é

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{St_N^{-1}} & S^2 \setminus \{N\} \\ w & \longmapsto & \left(\frac{2\,\mathrm{Re}\,w}{|w|^2+1}, \frac{2\,\mathrm{Im}\,w}{|w|^2+1}, \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}\right). \end{array}$$

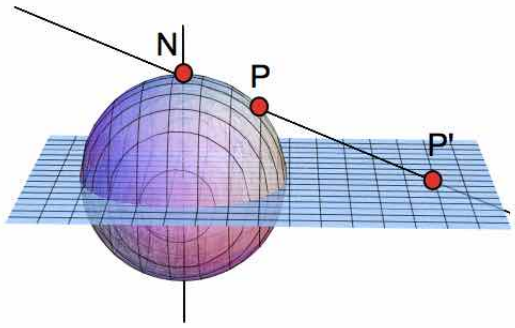

FIGURA 4.10. Projecção esteregráfica a partir do polo norte N.

A aplicação (4.3.3) pode ser estendida a S^2 dando origem a uma bijecção entre S^2 e $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ e, consequentemente, por (4.3.1), a uma bijecção

entre S^2 e $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$,

$$S^2 \quad \xrightarrow{St_N} \quad \overline{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

$$(x,y,z) \quad \longmapsto \quad \begin{cases} \frac{x}{1-z} + i\,\frac{y}{1-z}, & \text{se } (x,y,z) \neq N \\ \infty & \text{se } (x,y,z) = N, \end{cases} \tag{4.3.4}$$

cuja inversa é

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{C}} \quad &\xrightarrow{St_N^{-1}} \quad S^2 \\ w \quad &\longmapsto \quad \left(\tfrac{2\operatorname{Re} w}{|w|^2+1}, \tfrac{2\operatorname{Im} w}{|w|^2+1}, \tfrac{|w|^2-1}{|w|^2+1}\right) \\ \infty \quad &\longmapsto \quad N. \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Usando a projecção estereográfica e a distância esférica em S^2 podemos definir uma distância em $\overline{\mathbb{C}}$ (e consequentemente em $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$).

Definição 4.3.1. *A distância $d_{\overline{\mathbb{C}}}$ na esfera de Riemann é a aplicação $d_{\overline{\mathbb{C}}} : \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$d_{\overline{\mathbb{C}}}(z,w) := d_{S^2}\left(St_N^{-1}(z), St_N^{-1}(w)\right). \tag{4.3.6}$$

Nota 4.3.2. Alternativamente, podemos definir uma distância em $\overline{\mathbb{C}}$ a partir da distância euclidiana em $\mathbb{R}^3$:

$$\widetilde{d}_{\overline{\mathbb{C}}}(z,w) := d_{\mathbb{R}^3}\left(St_N^{-1}(z), St_N^{-1}(w)\right).$$

Nota 4.3.3. A projecção estereográfica é uma isometria entre S^2, com a distância esférica d_{S^2}, e $\overline{\mathbb{C}}$ com a distância $d_{\overline{\mathbb{C}}}$. É também uma isometria entre S^2, com a distância $d_{\mathbb{R}^3}$, e $\overline{\mathbb{C}}$ com a distância $\widetilde{d}_{\overline{\mathbb{C}}}$.

Uma propriedade geométrica importante da projecção estereográfica é dada pelo seguinte resultado.

Proposição 4.3.4. *Seja $\mathcal{C}$ um círculo de S^2, ou seja a intersecção de S^2 com um plano de $\mathbb{R}^3$. Então $St_N(\mathcal{C})$ ou é uma circunferência de $\mathbb{C} \subset \overline{\mathbb{C}}$ ou $St_N(\mathcal{C}) = \ell \cup \{\infty\}$, onde ℓ é uma recta de $\mathbb{C}$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{C}$ um círculo de S^2. Então $\mathcal{C}$ é a intersecção de S^2 com um plano $ax + by + cz = d$ de $\mathbb{R}^3$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Multiplicando por

uma constante adequada, podemos assumir que $\|(a,b,c)\| = 1$ e que $d \geq 0$. Note que

$$d = \langle (a,b,c),(x,y,z)\rangle \leq \|(a,b,c)\|\|(x,y,z)\| = 1,\ \forall (x,y,z) \in S^2.$$

Assim,

$$\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in S^2 :\ ax + by + cz = d\}, \tag{4.3.7}$$

com $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ e $0 \leq d \leq 1$. Escrevendo $w = St_N(x,y,z)$ e usando (4.3.5), temos

$$\begin{aligned} ax + by + cz = d &\Leftrightarrow 2\,a\,\mathrm{Re}\,w + 2\,b\,\mathrm{Im}\,w + c\,(|w|^2 - 1) = d\,(|w|^2 + 1) \\ &\Leftrightarrow (d-c)|w|^2 - 2\,a\,\mathrm{Re}\,w - 2\,b\,\mathrm{Im}\,w + d + c = 0. \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

Se $d = c$ então $\mathcal{C}$ passa no polo norte e (4.3.8) é equivalente a

$$2\,a\,\mathrm{Re}\,w + 2\,b\,\mathrm{Im}\,w - 2\,d = 0, \tag{4.3.9}$$

pelo que $St_N(\mathcal{C}) = \ell \cup \{\infty\}$ onde $\ell \subset \mathbb{C}$ é a recta cujos pontos $w = u + i\,v$ satisfazem a equação

$$a\,u + b\,v = d.$$

Se $d \neq c$ então, escrevendo $w = u + iv$, temos que (4.3.8) é equivalente a

$$\left(u - \frac{a}{d-c}\right)^2 + \left(v - \frac{b}{d-c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{(d-c)^2} - \frac{d+c}{d-c} = \frac{1-d^2}{(d-c)^2}, \tag{4.3.10}$$

onde usámos o facto que $a^2+b^2+c^2 = 1$. Concluímos que, nese caso, $St_N(\mathcal{C})$ é a circunferência de $\mathbb{C}$ de equação (4.3.10).

□

Nota 4.3.5. Se $d = 0$ então, usando a notação da demonstração da Proposição 4.3.4, o plano $ax + by + cz = d$ passa na origem, pelo que $\mathcal{C}$ é um círculo máximo de S^2. Se, além disso, $c \neq 0$, a imagem de $\mathcal{C}$ pela projecção esterográfica é a circunferência

$$\left(u + \frac{a}{c}\right)^2 + \left(v + \frac{b}{c}\right)^2 = \frac{1}{c^2} \tag{4.3.11}$$

de centro $-\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\,i\right)$ e raio $\frac{1}{|c|}$. Se $c = 0$, a imagem de $\mathcal{C}$ é $\ell \cup \{\infty\}$, onde ℓ é a recta de $\mathbb{C}$ de equação

$$a\,u + b\,v = 0 \tag{4.3.12}$$

(note que ℓ passa na origem).

Uma **circunferência** $\widetilde{\mathcal{C}} \subset \overline{\mathbb{C}}$ de centro $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ e raio $r \in \mathbb{R}^+$, para a distância $d_{\overline{\mathbb{C}}}$ é, por definição, o conjunto de pontos de $\overline{\mathbb{C}}$ cuja distãncia a z_0 é igual a r, ou seja

$$\widetilde{\mathcal{C}} = \left\{ z \in \overline{\mathbb{C}} : \, d_{\overline{\mathbb{C}}}(z, z_0) = r \right\}.$$

Então, como

$$d_{\overline{\mathbb{C}}}(z, z_0) = d_{S^2}\left(St_N^{-1}(z), St_N^{-1}(z_0) \right),$$

temos que $St_N^{-1}(\widetilde{\mathcal{C}})$ é um círculo de S^2. Com efeito, os pontos de S^2 que estão a uma distância esférica constante do ponto $St_N^{-1}(z_0)$ estão a uma distância euclidiana constante desse ponto, pelo que estão na intersecção de S^2 com uma esfera de $\mathbb{R}^3$ de centro $St_N^{-1}(z_0)$, formando um círculo de S^2.

Assim, usando a Proposição 4.3.4, temos que uma circunferência de $\overline{\mathbb{C}}$ que não passa em ∞ é uma circunferência em $\mathbb{C}$, enquanto que uma circunferência de $\overline{\mathbb{C}}$ que passa em ∞ é a união de $\{\infty\}$ com uma recta de $\mathbb{C}$. Conclui-se assim que a Proposição 4.3.4 é equivalente ao seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 4.3.6. *A projecção estereográfia transforma círculos de S^2 em circunferências de $\overline{\mathbb{C}}$.*

NOTA 4.3.7. Reciprocamente, qualquer circunferência ou recta de $\mathbb{C}$ pode ser escrita na forma (4.3.8), pelo que a correspondência entre círculos de S^2 e circunferências de $\overline{\mathbb{C}}$ é biunívoca.

Como definimos a distância em $\overline{\mathbb{C}}$ a partir da distância de S^2 usando a projecção estereográfica, as isometrias de $\left(\overline{\mathbb{C}}, d_{\overline{\mathbb{C}}}\right)$ são obtidas a partir das isometrias de S^2 conjugando com a projecção estereográfica. Isto é são as aplicações da forma

$$St_N \circ f \circ St_N^{-1},$$

onde $f : S^2 \to S^2$ é uma isometria de S^2. Como o grupo de isometrias de S^2 é gerado pelas reflexões em círculos máximos de S^2, o grupo de isometrias de $\overline{\mathbb{C}}$ é gerado pelas isometrias da forma $St_N \circ R_\ell \circ St_N^{-1}$ em que $\ell \subset S^2$ é um círculo máximo. Note que o conjunto de pontos fixos de uma destas isometrias é uma circunferência de $\overline{\mathbb{C}}$.

EXEMPLO 4.3.8. Seja $\ell \subset S^2$ o círculo máximo de S^2 de equação $z = 0$. Então

$$R_\ell(x, y, z) = (x, y, -z)$$

e

$$\begin{aligned}\left(St_N \circ R_\ell \circ St_N^{-1}\right)(w) &= St_N\left(\frac{2\operatorname{Re} w}{|w|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im} w}{|w|^2+1}, -\frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}\right)\\ &= \frac{\operatorname{Re} w}{|w|^2} + i\,\frac{\operatorname{Im} w}{|w|^2} = \frac{w}{|w|^2} = \frac{1}{\overline{w}}.\end{aligned}$$

Conclui-se assim que a isometria de $\overline{\mathbb{C}}$ induzida pela reflexão no equador de S^2 é a **inversão na circunferência unitária**,

$$\begin{array}{ccc} I : \overline{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{C}} \\ w & \longmapsto & I(w) := \frac{1}{\overline{w}} \end{array}$$

(ver Definição E.0.16). Note que $I(0) = \infty$ e $I(\infty) = 0$. Para além disso, I fixa os pontos da circunferência unitária: $\{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$.

Em geral, por (4.3.11), a isometria $I_{\mathcal{C}_m} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ induzida por uma reflexão R_m num círculo máximo $m \subset S^2$ dado pela interseção de S^2 com o plano

$$ax + by + cz = 0$$

com $\|(a,b,c)\| = 1$ e $c \neq 0$, é a **inversão na circunferência** $\mathcal{C}_m$ de $\overline{\mathbb{C}}$ de equação

$$\left(u + \frac{a}{c}\right)^2 + \left(v + \frac{b}{c}\right)^2 = \frac{1}{c^2}$$

(ver Definição E.0.16). Note que, se $z_0 = -(a+ib)/c$ e $r = 1/|c|$ são o centro e o raio de uma destas circunferências então

$$|z_0|^2 + 1 = r^2.$$

Se $c = 0$, então, por (4.3.12), a restrição a $\mathbb{C}$ da isometria $I_{\mathcal{C}_m} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ induzida por uma reflexão R_m coincide com a reflexão euclidiana na recta de $\mathbb{C}$ de equação

$$a\,u + b\,v = 0,$$

e $I_{\mathcal{C}_m}(\infty) = \infty$.

Como a reflexão R_m é dada por

$$\begin{aligned} R_m(x,y,z) &= (x,y,z) - 2\langle (x,y,z),(a,b,c)\rangle (a,b,c)\\ &= \begin{bmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

escrevendo $w = u + iv$, temos

$$I_{\mathcal{C}_m}(w) = \left(St_N \circ R_m \circ St_N^{-1}\right)(w) = (St_N \circ R_m)\left(\frac{2\,u}{|w|^2+1}, \frac{2\,v}{|w|^2+1}, \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}\right).$$

Além disso,

$$R_m\left(\frac{2\,u}{|w|^2+1},\frac{2\,v}{|w|^2+1},\frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}\right)=(x_1,x_2,x_3),$$

com

$$x_1=2\cdot\frac{(1-2a^2)u-2abv-ac(|w|^2-1)}{1+|w|^2}=2\cdot\frac{u-a(A\overline{w}+w\overline{A})-ac|w|^2+a\,c}{1+|w|^2}$$
$$x_2=2\cdot\frac{-2abu+(1-2b^2)v-bc(|w|^2-1)}{1+|w|^2}=2\cdot\frac{v-b(A\overline{w}+w\overline{A})-bc|w|^2+b\,c}{1+|w|^2}$$
$$x_3=\frac{-4acu-4bcv+(1-2c^2)(|w|^2-1)}{1+|w|^2},$$

onde $A=a+i\,b$. Então

$$1-x_3=2\cdot\frac{1+2acu+2bcv+c^2(|w|^2-1)}{1+|w|^2}=2\cdot\frac{a^2+b^2+2acu+2bcv+c^2|w|^2}{1+|w|^2}$$
$$=2\cdot\frac{|A|^2+c(A\overline{w}+w\overline{A})+c^2|w|^2}{1+|w|^2}=2\cdot\frac{|c\,\overline{w}+\overline{A}|^2}{1+|w|^2}$$

e temos

$$I_{\mathcal{C}_m}(w)=\frac{x_1+i\,x_2}{1-x_3}=\frac{w-(A\overline{w}+w\overline{A})A-c|w|^2A+cA}{|c\,\overline{w}+\overline{A}|^2}$$
$$=\frac{(1-|A|^2)w-A^2\overline{w}-c|w|^2A+cA}{|c\,\overline{w}+\overline{A}|^2}=\frac{c^2w-A^2\overline{w}-c|w|^2A+cA}{|c\,\overline{w}+\overline{A}|^2}$$
$$=-\frac{(A\overline{w}-c)\,(cw+A)}{|c\,\overline{w}+\overline{A}|^2}=\frac{A\overline{w}-c}{-c\,\overline{w}-\overline{A}}.$$

NOTA 4.3.9. É fácil verificar que, se $c\neq 0$, a inversão $I_{\mathcal{C}_m}$ na circunferência $\mathcal{C}_m$ se pode obter por conjugação a partir da inversão na circunferência unitária I. Em particular,

$$I_{\mathcal{C}_m}=T_{-\frac{A}{c}}\circ\delta_{\frac{1}{|c|}}\circ I\circ\delta^{-1}_{\frac{1}{|c|}}\circ T^{-1}_{-\frac{A}{c}},$$

onde $T_{-\frac{A}{c}}(w)=w-\frac{A}{c}$ e $\delta_{\frac{1}{|c|}}(w)=\frac{w}{|c|}$, com $-\frac{A}{c}$ e $\frac{1}{|c|}$ respectivamente o centro e o raio de $\mathcal{C}_m$.

Conclui-se assim o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 4.3.10. *A isometria de $\overline{\mathbb{C}}$ induzida por uma reflexão R_m num círculo máximo $m\subset S^2$, dado pela interseção de S^2 com o plano*

$$ax+by+cz=0$$

com $\|(a,b,c)\| = 1$*, é a inversão* $I_{\mathcal{C}_m} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *definida por*

$$I_{\mathcal{C}_m}(w) = \frac{A\overline{w} - c}{-c\,\overline{w} - \overline{A}}, \tag{4.3.13}$$

onde $A = a + i\,b$*.*

Em particular, se $c \neq 0$*, a aplicação* $I_{\mathcal{C}_m}$ *é a inversão na circunferência* $\mathcal{C}_m \subset \overline{\mathbb{C}}$ *de equação*

$$\left| w + \frac{A}{c} \right| = \frac{1}{|c|}. \tag{4.3.14}$$

Se $c = 0$*, a restrição de* $I_{\mathcal{C}_m}$ *a* $\mathbb{C}$ *coincide com a reflexão euclidiana na recta de* $\mathbb{C}$ *de equação*

$$a\,u + b\,v = 0,$$

e $I_{\mathcal{C}_m}(\infty) = \infty$*.*

4.4. Exercícios

EXERCÍCIO 4.4.1. Calcule a distância esférica $d_{S^2}(P,Q)$ entre os pontos

$$P = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0) \quad \text{e} \quad Q = (\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3).$$

EXERCÍCIO 4.4.2. Mostre que dois círculos máximos em S^2 se intersectam em pontos antípodas (i.e. num par de pontos da forma (x,y,z) e $(-x-y-z)$).

EXERCÍCIO 4.4.3. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) Qualquer ponto de S^2 fica univocamente determinado pelas distâncias a três pontos de S^2.
b) Dado um círculo máximo $\ell \subset S^2$ e um ponto $P \in S^2 \setminus \ell$, existe um único circulo máximo de S^2 que passa em P e é perpendicular a ℓ.
c) Dados três pontos distintos $P_1, P_2, P_3 \in S^2$ existe um único par de pontos antípodas $\pm X$ tais que $d_{S^2}(X, P_i) = d_{S^2}(X, P_j)$ para todo $i, j = 1, 2, 3$.

EXERCÍCIO 4.4.4. Considere em S^2 um triângulo esférico com ângulos α, β, γ e respectivos lados opostos a, b, c. Mostre que

a) $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$;
b) $\sin a \cdot \sin \beta = \sin b \cdot \sin \alpha$.

Sugestão: Utilize a igualdade $\langle (v_1 \times v_2), (v_3 \times v_4) \rangle = \det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_3 \rangle & \langle v_1, v_4 \rangle \\ \langle v_2, v_3 \rangle & \langle v_2, v_4 \rangle \end{pmatrix}$, onde $v_i \in \mathbb{R}^3$, para $i = 1, \cdots, 4$. Designando os vértices do trângulo por A, B e C,

note que

$$\cos a = d_{S^2}(B,C) = \langle \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \rangle \quad \text{e} \quad \sin a = ||\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}||,$$

e que b e c satisfazem fórmulas similares. Além disso, $\alpha = \measuredangle(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC})$, pelo que

$$\cos \alpha = \frac{\langle \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC} \rangle}{\sin c \, \sin b}.$$

EXERCÍCIO 4.4.5. Mostre que as medianas de um triângulo esférico se intersectam num ponto.

Sugestão: Considere o plano H gerado pelos vértices A, B, C do triângulo esférico Δ e a aplicação $\pi : S^2 \to H$ que a cada ponto P de S^2 faz corresponder o ponto de intersecção de H com a recta OP. Mostre que a imagem de Δ é o triângulo euclidiano $\Delta' \subset \mathbb{R}^3$ com os mesmos vértices e que a imagem de uma mediana de Δ é a mediana de Δ' correspondente.

EXERCÍCIO 4.4.6. Mostre que qualquer isometria de S^2 transforma um par de pontos antípodas num par de pontos antípodas.

EXERCÍCIO 4.4.7. Sejam f e g duas rotações de S^2. Quando é que $f \circ g = g \circ f$?

EXERCÍCIO 4.4.8. Seja P um ponto de S^2. Quais os círculos máximos ℓ de S^2 para os quais

$$(R_\ell \circ \rho_{P,\pi})^2 = id_{S^2},$$

onde $\rho_{P,\pi}$ designa a meia-volta em torno do eixo da esfera que passa em P?

EXERCÍCIO 4.4.9. Dê um exemplo de uma composição de três reflexões de S^2 sem pontos fixos.

EXERCÍCIO 4.4.10. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) Qualquer rotação de S^2 é a composta de duas meia-voltas;
b) Duas isometrias directas não triviais de S^2 comutam se e só se têm o mesmo conjunto de pontos fixos.
c) Dada uma isometria $f : S^2 \to S^2$ existe sempre um ponto $P \in S^2$ tal que $f(P) = P$ ou $f(P) = -P$.

EXERCÍCIO 4.4.11. Qual a área dum triângulo esférico equilátero de S^2 com ângulos internos rectos? Esboce um destes triângulos.

EXERCÍCIO 4.4.12. Diga, justificando, se existe um triângulo equilátero em S^2 com ângulos internos iguais a $\pi/4$.

EXERCÍCIO 4.4.13. Determine o ínfimo e o supremo da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico equilátero.

Sugestão: Considere a família de triângulos esféricos equiláteros Δ_ϕ de vértices

$$P = (0,0,1), \quad Q_\phi = (\sin\phi, 0, \cos\phi), \quad R_\phi = (\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi),$$

com $\theta = \arccos\left(\frac{\cos\phi}{1+cos\phi}\right)$ e $\phi \in]0, \frac{2\pi}{3}[$ e, usando o Exercício 4.4.4, determine os ângulos internos destes triângulos.

EXERCÍCIO 4.4.14. Qual a área de um pentágono esférico de ângulos internos $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$?

EXERCÍCIO 4.4.15. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) Existem quadriláteros esféricos com ângulos internos todos iguais a $\pi/2$;
b) Para cada $\alpha \in]0, \pi[$ existe um triângulo esférico cuja soma dos ângulos internos é $\pi + \alpha$.

EXERCÍCIO 4.4.16. Considere os pontos $P := (1,0,0)$, $Q := (0,0,1)$,

$$R := \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad S := \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \text{e} \quad T := \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

de S^2.

a) Calcule $d_{S^2}(R,S)$.
b) Determine a equação cartesiana do plano de $\mathbb{R}^3$ que contém o círculo máximo $\ell \subset S^2$ que passa em R e S.
c) Indique os ângulos internos do triângulo esférico Δ de vértices P, Q e R e calcule a área de Δ.
d) Classifique a isometria de S^2 definida por

$$R_{m_P} \circ R_{m_Q} \circ R_{m_R},$$

onde m_P, m_Q, m_R são os círculos máximos de S^2 que contêm os lados do triângulo Δ opostos aos vértices P, Q e R respectivamente. Determine a expressão desta isometria e indique, se existirem, os seus pontos fixos.
e) Determine o conjunto dos pontos equidistantes de P e T para a distância esférica.

EXERCÍCIO 4.4.17. Em $\mathbb{P}^2$ calcule

$$d_{\mathbb{P}^2}([1:1:1],[-1:1:1]),\ d_{\mathbb{P}^2}([1:1:1],[1:0:0]) \text{ e } d_{\mathbb{P}^2}([1:1:0],[1:0:0]).$$

EXERCÍCIO 4.4.18. Em $\mathbb{P}^2$ considere as rectas projectivas ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3, definidas respectivamente pelas equações

$$\ell_1 \colon x_2 = 0, \quad \ell_2 \colon x_0 = 0, \quad \text{e} \quad \ell_3 : x_0 - 2x_1 = 0.$$

Qual o conjunto dos pontos de $\mathbb{P}^2$ equidistantes dos pontos $\ell_1 \cap \ell_2$ e $\ell_2 \cap \ell_3$ para a distância projectiva $d_{\mathbb{P}^2}$?

EXERCÍCIO 4.4.19. Sendo $S = (0, 0, -1)$ o polo sul da esfera S^2, obtenha a expressão da projecção estereográfica $\mathrm{St}_S : S^2 \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^2$ a partir de S.

EXERCÍCIO 4.4.20. Considerando em $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ a distância $d_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$ induzida pela distância esférica de S^2 através da projecção estereográfica, calcule

$$d_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}([1+i:3],[3+2i:6]) \quad \text{e} \quad d_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}([1+i:3],[1:0]).$$

EXERCÍCIO 4.4.21. Seja $I_C : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ uma inversão em relação a uma circunferência $C \subset \overline{\mathbb{C}}$. Mostre que C é uma involução (i.e. $I_C \circ I_C = Id$).

EXERCÍCIO 4.4.22. Seja $I : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ a inversão numa circunferência unitária centrada na origem, $l \subset \mathbb{C}$ uma recta e $C \subset \mathbb{C}$ uma circunferência. Considerando $\bar{l} := l \cup \{\infty\} \subset \overline{\mathbb{C}}$, mostre que:

a) se l não passa na origem então $I\left(\bar{l}\right)$ é uma circunferência que passa na origem;
b) se l passa na origem então $I\left(\bar{l}\right) = \bar{l}$;
c) se C não passa na origem então $I(C)$ é uma circunferência que não passa na origem;
d) se C passa na origem então $I(C) \setminus \{\infty\}$ é uma recta que não passa na origem;

EXERCÍCIO 4.4.23. Seja $I : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ a inversão na unitária centrada na origem. Determine a imagem por I das seguintes curvas:

a) a recta $4x - 4y = 1$ onde x e y são tais que $w = x + iy$;
b) a circunferência de centro $3 - 4\,i$ e raio 5.

EXERCÍCIO 4.4.24. Seja $I : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ a inversão na circunferência unitária centrada na origem, $l \subset \mathbb{C}$ uma recta que não passa na origem e C a circunferência $C = I(l \cup \{\infty\})$. Mostre que a recta tangente a C na origem é paralela a l.

Sugestão: Por rotação dos eixos coordenados pode assumir-se que l é uma recta vertical.

EXERCÍCIO 4.4.25. Seja $\mathcal{C} \subset \overline{\mathbb{C}}$ a imagem do conjunto

$$C := \{X \in S^2 : d_{S^2}(X, (1,0,0)) = 1\}$$

pela projecção estereográfica $St_N : S^2 \to \overline{\mathbb{C}}$. Determine $I(\mathcal{C})$ onde $I : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ é a inversão na circunferência unitária.

EXERCÍCIO 4.4.26. Considere as aplicações $f_1, f_2 : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ definidas por

$$f_1(w) = \frac{a_1 w + b_1}{c_1 w + d_1} \quad \text{e} \quad f_2(w) = \frac{a_2 w + b_2}{c_2 w + d_2},$$

onde $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{C}$, para $i = 1, 2$. Mostre que

$$(f_1 \circ f_2)(w) = \frac{aw + b}{cw + d},$$

onde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

Nota: Quando $a_i d_i - b_i c_i \neq 0$ estas aplicações são designadas por transformações de Möbius (ver Definição E.0.1).

EXERCÍCIO 4.4.27. Considere as aplicações $g_1, g_2 : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ definidas por

$$g_1(w) = \frac{a_1 \overline{w} + b_1}{c_1 \overline{w} + d_1} \quad \text{e} \quad g_2(w) = \frac{a_2 \overline{w} + b_2}{c_2 \overline{w} + d_2},$$

onde $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{C}$, para $i = 1, 2$. Mostre que

$$(g_1 \circ g_2)(w) = \frac{aw + b}{cw + d},$$

onde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a}_2 & \overline{b}_2 \\ \overline{c}_2 & \overline{d}_2 \end{pmatrix}.$$

Sugestão: Note que podemos escrever $g_1 \circ g_2 = f_1 \circ f_3$, com $f_3 = h \circ f_2 \circ h$, onde f_1 e f_2 são as aplicações do Exercício 4.4.26 e h é a conjugação $h(w) = \overline{w}$.

EXERCÍCIO 4.4.28. Mostre que as aplicações de $\overline{\mathbb{C}}$ induzidas pelas rotações de S^2 através da projecção estereográfica são precisamente as funções da forma

$$g(w) = \frac{aw + b}{-\overline{b}w + \overline{a}},$$

onde $a, b \in \mathbb{C}$ e $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Sugestão: Use a Proposição 4.3.10 e o Exercício 4.4.27.

EXERCÍCIO 4.4.29. Mostre que uma rotação de S^2 em torno do eixo O_y induz uma aplicação em $\overline{\mathbb{C}}$ da forma

$$f(w) = \frac{\alpha w + \beta}{-\beta w + \alpha},$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Sugestão: Use o Exercício 4.4.28 e considere os pontos fixos de f.

EXERCÍCIO 4.4.30. Sejam C_1, C_2 e C_3 circunferências de $\mathbb{C}$ tais que C_2 intersecta C_3 num único ponto P, C_1 intersecta C_3 num único ponto Q e C_1 intersecta C_2 num único ponto R. Seja C a circunferência que passa nos pontos P, Q e R. Mostre que C é perpendicular a C_1, C_2 e C_3.

Sugestão: Considere uma inversão numa circunferência de centro R e as imagens das circunferências C_i e C por essa inversão. Use o facto de que as inversões preservam ângulos (ver Teorema E.0.21).

EXERCÍCIO 4.4.31. Dada uma recta euclidiana ℓ em $\overline{\mathbb{C}}$ que passa na origem, considere a família de todas as circunferências de $\overline{\mathbb{C}}$ que são tangentes a ℓ na origem. Quais as imagens destas circunferências pela inversão na circunferência de raio 1 e centro na origem?

CAPÍTULO 5

Geometria Hiperbólica

Neste capítulo vamos ver mais exemplos de geometrias não euclidianas em dimensão 2: o plano hiperbólico e o disco de Poincaré. Nestes exemplos não se verifica o axioma das paralelas pois por um ponto exterior a uma recta passam infinitas rectas que não a intersectam.

5.1. O Plano Hiperbólico

O primeiro exemplo de geometria hiperbólica que vamos estudar tem como espaço o **plano hiperbólico** $\mathbb{H}$ definido por

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}.$$

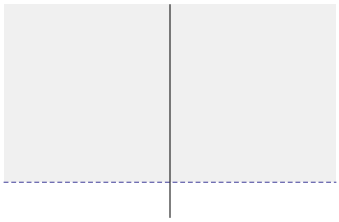

FIGURA 5.1. Plano hiperbólico $\mathbb{H}$.

Queremos que as isometrias de $\mathbb{H}$ sejam os elementos do grupo de Möbius generalizado (ver Apêndice E) que levam $\mathbb{H}$ em $\mathbb{H}$, ou seja o grupo

$$G_{\mathbb{H}} := \{f \in \text{Möb} : f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}\}.$$

TEOREMA 5.1.1. *As aplicações $f \in Möb$ tais que $f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ são*

- *as transformações de Möbius* $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *da forma*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \tag{5.1.1}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *e* $ad - bc > 0$ *e*

- *as aplicações* $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *da forma*

$$f(z) = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d} \tag{5.1.2}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *e* $ad - bc < 0$.

Demonstração: Se $f \in$ Möb é tal que $f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ então, por continuidade, $f(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$. Claramente se f é da forma (5.1.1) ou (5.1.2) então $f(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$. Vejamos agora que, se $f(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$, então podemos sempre escolher $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e escrever f na forma (5.1.1) ou (5.1.2).

Seja f um elemento de Möb,

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{ou} \quad f(z) = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d},$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $ad - bc \neq 0$, tal que $f(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$.

- Se $c = 0$ (o que implica $ad \neq 0$) temos
  - $f(0) = \frac{b}{d} \in \mathbb{R}$, pelo que $b = \beta\, d$ com $\beta \in \mathbb{R}$;
  - $f(\infty) = \infty$;
  - $f(1) = \frac{a+b}{d} \in \mathbb{R}$, pelo que $a + b = k\, d$ com $k \in \mathbb{R}$.

Então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $a = \alpha\, d$ e assim

$$f(z) = \frac{az+b}{d} = \alpha z + \beta \quad \text{ou} \quad f(z) = \frac{a\overline{z}+b}{d} = \alpha\overline{z} + \beta$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Se $c \neq 0$ e $d \neq 0$ temos
  - $f(0) = \frac{b}{d} \in \mathbb{R}$, pelo que $b = \beta d$ com $\beta \in \mathbb{R}$;
  - $f(\infty) = \frac{a}{c} \in \mathbb{R}$, pelo que $a = \alpha c$ com $\alpha \in \mathbb{R}$;
  - $f(1) = \frac{a+b}{c+d} \in \overline{\mathbb{R}}$ e $f(-1) = \frac{b-a}{d-c} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Se $d \neq -c$ então $f(1) \in \mathbb{R}$, pelo que $a+b = t(c+d)$ com $t \in \mathbb{R}$, o que implica

$$(t - \alpha)c = (\beta - t)d.$$

Como $d \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$, temos $t - \alpha \neq 0$ e

$$c = \frac{\beta - t}{t - \alpha}\, d.$$

Se $d = -c$ então $f(-1) \in \mathbb{R}$, pelo que $b - a = t(d - c)$ com $t \in \mathbb{R}$, o que implica

$$(t - \alpha)c = (t - \beta)d.$$

Como $d \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$, temos $t - \alpha \neq 0$ e

$$c = \frac{t-\beta}{t-\alpha}\, d.$$

Em ambos os casos concluímos que existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $c = \gamma\, d$. Assim,

$$f(z) = \frac{a\, z + b}{c\, z + d} = \frac{\alpha\, \gamma\, z + \beta}{\gamma\, z + 1} \quad \text{ou} \quad f(z) = \frac{a\, \overline{z} + b}{c\, \overline{z} + d} = \frac{\alpha\, \gamma\, \overline{z} + \beta}{\gamma\, \overline{z} + 1}$$

com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

- Se $d = 0$ e $c \neq 0$ temos
  - $f(0) = \infty$;
  - $f(\infty) = \frac{a}{c} \in \mathbb{R}$, pelo que $a = \alpha c$ com $\alpha \in \mathbb{R}$;
  - $f(1) = \frac{a+b}{c} \in \mathbb{R}$, pelo que $a + b = t\, c$ com $t \in \mathbb{R}$ e então $b = \beta c$ com $\beta \in \mathbb{R}$.

Assim,

$$f(z) = \frac{a\, z + b}{c\, z + d} = \frac{\alpha\, z + \beta}{z} \quad \text{ou} \quad f(z) = \frac{a\, \overline{z} + b}{c\, \overline{z}} = \frac{\alpha\, \overline{z} + \beta}{\overline{z}}$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Em todos os casos conclui-se que f pode ser escrita na forma

$$f(z) = \frac{a\, z + b}{c\, z + d} \quad \text{ou} \quad f(z) = \frac{a\, \overline{z} + b}{c\, \overline{z} + d}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc \neq 0$.

Como $f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ temos, por exemplo, que $f(i) \in \mathbb{H}$.

Se $f \in \text{Möb}^+$ então

$$f(i) = \frac{b + ai}{d + ci} = \frac{(b + ai)(d - ci)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd + i(ad - bc)}{c^2 + d^2} \in \mathbb{H}$$

pelo que necessariamente $ad - bc > 0$.

Se $f \in \text{Möb} \setminus \text{Möb}^+$ então

$$f(i) = \frac{b - ai}{d - ci} = \frac{(b - ai)(d + ci)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd - i(ad - bc)}{c^2 + d^2} \in \mathbb{H},$$

pelo que necessariamente $ad - bc < 0$. □

Como queremos que $G_{\mathbb{H}}$ seja o grupo de isometrias de $\mathbb{H}$, vamos definir uma distância neste espaço que seja preservada pelos elementos de $G_{\mathbb{H}}$. Para

isso vamos começar por ver se estas aplicações preservam a distância euclidiana $|z-w|$ entre dois pontos $z, w \in \mathbb{H}$. Se $f \in G_{\mathbb{H}}$ temos

(5.1.3)

$$|f(z)-f(w)| = \left|\frac{az+b}{cz+d} - \frac{aw+b}{cw+d}\right| = \left|\frac{(az+b)(cw+d)-(aw+b)(cz+d)}{(cz+d)(cw+d)}\right|$$
$$= \frac{|ad-bc|}{|(cz+d)(cw+d)|}|z-w|,$$

pelo que facilmente se verifica que a aplicação $\delta_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\delta_{\mathbb{H}}(z,w) := \left|\frac{z-w}{\overline{z}-w}\right|$$

(o quociente entre a distância euclidiana entre z e w e a distância entre o conjugado $\overline{z}$ e w) é preservada pelos elementos de $G_{\mathbb{H}}$ (ver Figura 5.2). Em particular,

$$\delta_{\mathbb{H}}(f(z), f(w)) = \delta_{\mathbb{H}}(z,w).$$

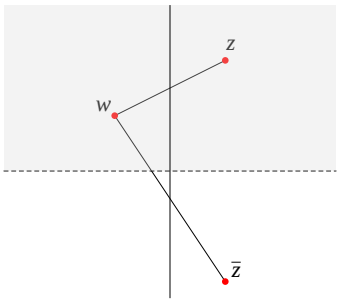

FIGURA 5.2. $\delta_{\mathbb{H}}(z,w)$.

PROPOSIÇÃO 5.1.2. *A aplicação $\delta_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\delta_{\mathbb{H}}(z,w) \geq 0$;
(ii) $\delta_{\mathbb{H}}(z,w) = 0 \Leftrightarrow z = w$;
(iii) $\delta_{\mathbb{H}}(z,w) = \delta_{\mathbb{H}}(w,z)$.

Demonstração: Trivial. □

Apesar de satisfazer também a desigualdade triangular o que, em conjunto com as propriedades (1) a (3) da Proposição 5.1.2 faz de $\delta_{\mathbb{H}}$ uma distância em $\mathbb{H}$ (normalmente designada por distância pseudo-hiperbólica), veremos na Nota 5.1.12 que esta desigualdade é sempre estrita, o que não nos permite definir segmentos de recta. Além disso, se tomássemos $\delta_{\mathbb{H}}$ como

distância em $\mathbb{H}$, todos os pontos de $\overline{\mathbb{R}}$ estariam a uma distância finita de qualquer ponto de $\mathbb{H}$ pois

$$\delta_{\mathbb{H}}(z,a) = \left|\frac{z-a}{\overline{z}-a}\right| = \left|\frac{z-a}{z-a}\right| = 1, \quad \forall z \in \mathbb{H},\ a \in \overline{\mathbb{R}}$$

(note que $\delta_{\mathbb{H}}(z,w) < 1,\ \forall z,w \in \mathbb{H}$). Para ultrapassar estes problemas utiliza-se a seguinte aplicação para distância em $\mathbb{H}$.

DEFINIÇÃO 5.1.3. *A* ***distância hiperbólica*** *em $\mathbb{H}$ é a aplicação $d_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$d_{\mathbb{H}}(z,w) := 2\,\mathrm{arctanh}(\delta_{\mathbb{H}}(z,w)) = \ln\left(\frac{1+\delta_{\mathbb{H}}(z,w)}{1-\delta_{\mathbb{H}}(z,w)}\right).$$

NOTA 5.1.4. Como $\delta_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ admite todos os valores de $[0,1[$ e $\mathrm{arctanh}([0,1[) = [0,+\infty[$, temos que $d_{\mathbb{H}}$ admite todos os valores de $[0,+\infty[$ (ver Figura 5.3).

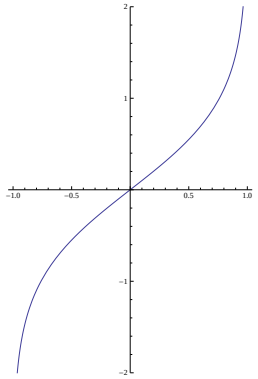

FIGURA 5.3. A função $u \mapsto \mathrm{arctanh}(u)$, para $u \in]-1,1[$.

PROPOSIÇÃO 5.1.5. *A aplicação $d_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $d_{\mathbb{H}}(z,w) \geq 0$;
(ii) $d_{\mathbb{H}}(z,w) = 0 \Leftrightarrow \delta_{\mathbb{H}}(z,w) = 0 \Leftrightarrow z = w$;
(iii) $d_{\mathbb{H}}(z,w) = d_{\mathbb{H}}(w,z)$.

Demonstração: Trivial. □

Antes de mostrar que $d_{\mathbb{H}}$ verifica a desigualdade triangular vamos determinar os pontos de $\mathbb{H}$ onde a igualdade é válida para podermos definir

segmentos de recta hiperbólicos. Comecemos com três pontos no eixo imaginário $z_1 = ai$, $z_2 = bi$ e $z_3 = ci$ com $0 < a \leq b \leq c$. Então

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) + d_{\mathbb{H}}(z_2, z_3) = d_{\mathbb{H}}(z_1, z_3). \tag{5.1.4}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) &= 2 \operatorname{arctanh} \left| \frac{ai - bi}{-ai - bi} \right| = 2 \operatorname{arctanh} \frac{b-a}{a+b}, \\ d_{\mathbb{H}}(z_2, z_3) &= 2 \operatorname{arctanh} \left| \frac{bi - ci}{-bi - ci} \right| = 2 \operatorname{arctanh} \frac{c-b}{b+c}, \\ d_{\mathbb{H}}(z_1, z_3) &= 2 \operatorname{arctanh} \left| \frac{ai - ci}{-ai - ci} \right| = 2 \operatorname{arctanh} \frac{c-a}{a+c}, \end{aligned}$$

e então,

$$\tanh\left(\frac{d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)}{2} + \frac{d_{\mathbb{H}}(z_2, z_3)}{2}\right) = \frac{\frac{b-a}{a+b} + \frac{c-b}{b+c}\cdot}{1 + \frac{b-a}{a+b} \cdot \frac{c-b}{b+c}} = \frac{c-a}{a+c} = \tanh\left(\frac{d_{\mathbb{H}}(z_1, z_3)}{2}\right),$$

onde usámos a identidade

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}. \tag{5.1.5}$$

Como a tangente hiperbólica é uma aplicação injectiva concluímos que estes três pontos verificam (5.1.4).

Se ℓ é o eixo imaginário, os pontos de $\ell \cup \{\infty\}$ formam uma circunferência de $\overline{\mathbb{C}}$ perpendicular ao eixo real. Como os elementos de Möb levam circunferências de $\overline{\mathbb{C}}$ em circunferências de $\overline{\mathbb{C}}$ e preservam ângulos (cf. Teorema E.0.21), as possíveis imagens $f(\ell)$ com $f \in G_{\mathbb{H}}$ são circunferências de $\overline{\mathbb{C}}$ perpendiculares ao eixo real (pois $f(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$). Assim, (5.1.4) é verificada por pontos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{H}$ numa semirecta de equação $\operatorname{Re} z = k$, $(k \in \mathbb{R})$, ou numa semicircunferência $|z - k| = r$ de centro $k \in \mathbb{R}$. São então estas as rectas hiperbólicas de $\mathbb{H}$ (ver Figura 5.4).

DEFINIÇÃO 5.1.6. *As* ***rectas hiperbólicas*** *de $\mathbb{H}$ são as curvas de $\mathbb{H}$ de equação*

- *$\operatorname{Re} z = k$ com $k \in \mathbb{R}$ ou*
- *$|z - k| = r$ com $k \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}^+$.*

NOTA 5.1.7. Dados dois pontos $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ existe uma única recta hiperbólica que passa em z_1 e z_2.

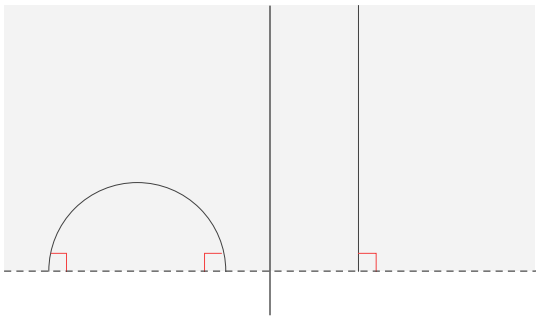

FIGURA 5.4. Rectas hiperbólicas em $\mathbb{H}$.

Com efeito, se $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 = k$ estão existe uma única recta hiperbólica que passa nos dois pontos: a recta $\operatorname{Re} z = k$.

Caso contrário, a mediatriz do segmento de recta euclidiano que une z_1 a z_2 intersecta o eixo real num único ponto c, pelo que, também neste caso, existe uma única recta hiperbólica que passa nos dois pontos: a recta hiperbólica definida pela equação $|z - c| = |z_1 - c|$.

Vejamos agora que, se os pontos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{H}$ não estão numa mesma recta hiperbólica, então satisfazem a desigualdade triangular estrita. Para isso necessitamos do seguinte lema.

LEMA 5.1.8. *As* ***circunferências hiperbólicas*** *de* $\mathbb{H}$ *são circunferências euclidianas. Em particular, a circunferência hiperbólica de centro* z_0 *e raio* r

$$C_r(z_0) := \{z \in \mathbb{H} : \, d_{\mathbb{H}}(z, z_0) = r\}$$

é a circunferência euclidiana de centro (euclidiano) $\frac{z_0 - \overline{z}_0 m^2}{1-m^2}$ *e raio (euclidiano)* $(\sinh r) \operatorname{Im} z_0$*, onde* $m = \tanh\left(\frac{r}{2}\right)$.

Demonstração: Uma circunferência euclidiana em $\mathbb{C}$ pode ser escrita na forma

(5.1.6)

$$|z - w_0|^2 = k^2 \Leftrightarrow (z - w_0)(\overline{z} - \overline{w}_0) = k^2 \Leftrightarrow |z|^2 - w_0\overline{z} - \overline{w}_0 z + |w_0|^2 - k^2 = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(z,z_0) = r &\Leftrightarrow 2\operatorname{arctanh}\left(\delta_{\mathbb{H}}(z,z_0)\right) = r \Leftrightarrow \delta_{\mathbb{H}}(z,z_0) = \tanh\left(\frac{r}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow \left|\frac{z-z_0}{\overline{z}-z_0}\right|^2 = m^2 \Leftrightarrow (z-z_0)(\overline{z}-\overline{z_0}) = m^2(\overline{z}-z_0)(z-\overline{z}_0) \\ &\Leftrightarrow (1-m^2)|z|^2 - (\overline{z}_0 - m^2\, z_0)z - (z_0 - m^2\overline{z}_0)\overline{z} + (1-m^2)|z_0|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 - \frac{\overline{z}_0 - m^2\, z_0}{1-m^2}z - \frac{z_0 - m^2\overline{z}_0}{1-m^2}\,\overline{z} + |z_0|^2 = 0, \end{aligned}$$

com $m = \tanh\left(\frac{r}{2}\right)$, pelo que, por (5.1.6), a circunferência hiperbólica $C_r(z_0)$ é a circunferência euclidiana de centro $\frac{z_0 - m^2\overline{z}_0}{1-m^2}$ e raio

$$\sqrt{\left|\frac{z_0 - m^2\overline{z}_0}{1-m^2}\right|^2 - |z_0|^2} = \frac{2m}{1-m^2}\operatorname{Im} z_0 = (\sinh r)\operatorname{Im} z_0.$$

□

NOTA 5.1.9. É fácil verificar que o centro hiperbólico de um circunferência hiperbólica $C_r(z_0)$ tem a mesma parte real que o centro euclidano, isto é

$$\operatorname{Re}(z_0) = \operatorname{Re}\left(\frac{z_0 - \overline{z}_0 m^2}{1-m^2}\right),$$

onde $m = \tanh(\frac{r}{2})$.

PROPOSIÇÃO 5.1.10. *Sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{H}$ três pontos distintos que não estão numa mesma recta hiperbólica. Então*

$$d_{\mathbb{H}}(z_1,z_3) < d_{\mathbb{H}}(z_1,z_2) + d_{\mathbb{H}}(z_2,z_3). \tag{5.1.7}$$

Demonstração: Se

$$d_{\mathbb{H}}(z_1,z_2) \geq d_{\mathbb{H}}(z_1,z_3) \quad \text{ou} \quad d_{\mathbb{H}}(z_2,z_3) \geq d_{\mathbb{H}}(z_1,z_3)$$

então (5.1.7) é trivialmente verificada. Caso contrário, isto é se

$$d_{\mathbb{H}}(z_1,z_2) < d_{\mathbb{H}}(z_1,z_3) \quad \text{e} \quad d_{\mathbb{H}}(z_2,z_3) < d_{\mathbb{H}}(z_1,z_3), \tag{5.1.8}$$

seja ℓ a recta hiperbólica que passa em z_1 e z_3 (cf. Nota 5.1.7) e $C_{d_{\mathbb{H}}(z_1,z_2)}(z_1)$ e $C_{d_{\mathbb{H}}(z_3,z_2)}(z_3)$ as circunferências hiperbólicas definidas respectivamente como o conjunto de pontos de $\mathbb{H}$ que estão à mesma distância de z_1 que z_2 e os que estão à mesma distância de z_3 que z_2. Utilizando um elemento de $G_{\mathbb{H}}$ podemos supor que ℓ é o eixo imaginário. Pelo Lema 5.1.8 os conjuntos $C_{d_{\mathbb{H}}(z_1,z_2)}(z_1)$ e $C_{d_{\mathbb{H}}(z_3,z_2)}(z_3)$ são duas circunferências euclidianas e, por (5.1.8), intersectam ℓ respectivamente em pontos A e B entre z_1 e z_3 (ver

Figura 5.5). Como as duas circunferências se intersectam (z_2 pertence às duas circunferências), o ponto B está mais próximo de z_1 do que A. Assim,

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) + d_{\mathbb{H}}(z_2, z_3) &= d_{\mathbb{H}}(z_1, A) + d_{\mathbb{H}}(B, z_3) \\ &= d_{\mathbb{H}}(z_1, B) + d_{\mathbb{H}}(B, A) + d_{\mathbb{H}}(B, z_3) \\ &= d_{\mathbb{H}}(z_1, z_3) + d_{\mathbb{H}}(B, A) > d_{\mathbb{H}}(z_1, z_3). \end{aligned}$$

Note que $A \neq B$ pois as duas circunferências intersectam-se em z_2 e $z_2 \notin \ell$. □

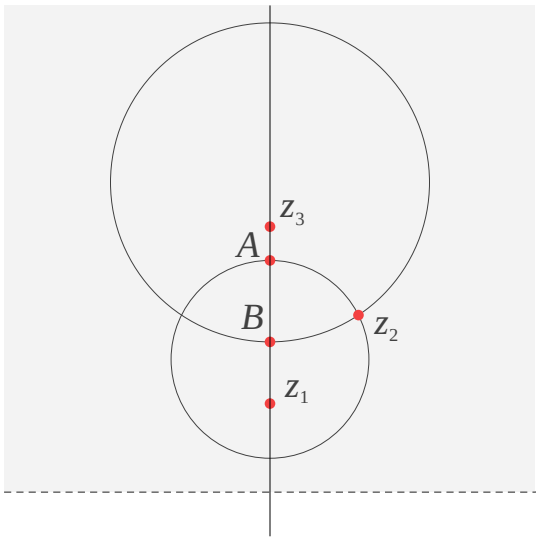

FIGURA 5.5. Desigualdade triangular em $\mathbb{H}$.

Concluímos assim o seguinte resultado.

TEOREMA 5.1.11. *A aplicação $d_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}^+$ verifica a desigualdade triangular*

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_3) \leq d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) + d_{\mathbb{H}}(z_2, z_3), \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{H}.$$

Além disso, $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_3) = d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) + d_{\mathbb{H}}(z_2, z_3)$ se e só se z_2 está no segmento de recta hiperbólico que une z_1 e z_3.

NOTA 5.1.12. Podemos agora verificar que $\delta_{\mathbb{H}}$ nunca verifica a igualdade triangular estrita, isto é que

$$\delta_{\mathbb{H}}(z_1, z_3) < \delta_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) + \delta_{\mathbb{H}}(z_2, z_3), \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{H}.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}\delta_{\mathbb{H}}(z_1,z_3) &= \tanh\left(\frac{d_{\mathbb{H}}(z_1,z_3)}{2}\right) \leq \tanh\left(\frac{d_{\mathbb{H}}(z_1,z_2)}{2}+\frac{d_{\mathbb{H}}(z_2,z_3)}{2}\right)\\ &= \frac{\tanh\left(\frac{d_{\mathbb{H}}(z_1,z_2)}{2}\right)+\tanh\left(\frac{d_{\mathbb{H}}(z_2,z_3)}{2}\right)}{1+\tanh\left(\frac{d_{\mathbb{H}}(z_1,z_2)}{2}\right)\cdot\tanh\left(\frac{d_{\mathbb{H}}(z_2,z_3)}{2}\right)}\\ &< \tanh\left(\frac{d_{\mathbb{H}}(z_1,z_2)}{2}\right)+\tanh\left(\frac{d_{\mathbb{H}}(z_2,z_3)}{2}\right) = \delta_{\mathbb{H}}(z_1,z_2)+\delta_{\mathbb{H}}(z_2,z_3).\end{aligned}$$

5.2. O Disco de Poincaré

Outro modelo de geometria hiperbólica é o **disco de Poincaré**,

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

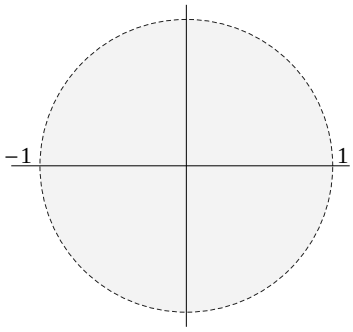

FIGURA 5.6. Disco de Poincaré $\mathbb{D}$.

Este espaço é obtido a partir do plano hiperbólico $\mathbb{H}$ através da transformação de Möbius $J : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ definida por

$$J(z) := \frac{iz+1}{z+i},$$

que verifica $J(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$.

NOTA 5.2.1. A aplicação inversa $J^{-1} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ é a transformação de Möbius

$$J^{-1}(w) = \frac{-iw+1}{w-i}.$$

Note que $J(1) = 1$, $J(-1) = -1$ e $J(\infty) = i$.

A distância em $\mathbb{D}$ é definida a partir da distância em $\mathbb{H}$, usando a aplicação J. Em particular,

$$\delta_{\mathbb{D}}(z,w) := \delta_{\mathbb{H}}(J^{-1}(z), J^{-1}(w)) = \left|\frac{J^{-1}(z) - J^{-1}(w)}{\overline{J^{-1}(z)} - J^{-1}(w)}\right| = \left|\frac{\frac{1-iz}{z-i} - \frac{1-iw}{w-i}}{\frac{i\overline{z}+1}{\overline{z}+i} - \frac{1-iw}{w-i}}\right|$$
$$= \left|\frac{(1-iz)(w-i) - (1-iw)(z-i)}{(i\overline{z}+1)(w-i) - (1-iw)(\overline{z}+i)}\right| = \left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right|$$

e obtemos a seguinte aplicação.

Definição 5.2.2. *A **distância hiperbólica** $d_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ é a aplicação*

$$d_{\mathbb{D}}(z,w) := 2\,\mathrm{arctanh}\,(\delta_{\mathbb{D}}(z,w)) = \ln\left(\frac{1+\delta_{\mathbb{D}}(z,w)}{1-\delta_{\mathbb{D}}(z,w)}\right),$$

onde $\delta_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$\delta_{\mathbb{D}}(z,w) = \left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right|.$$

Note que $d_{\mathbb{D}}$ assim definda é uma distância pois satisfaz as seguintes propriedades.

Proposição 5.2.3. *A aplicação $d_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ satisfaz*

(i) $d_{\mathbb{D}}(z,w) \geq 0$;
(ii) $d_{\mathbb{D}}(z,w) = 0 \Leftrightarrow \delta_{\mathbb{H}}(z,w) = 0 \Leftrightarrow z = w$;
(iii) $d_{\mathbb{D}}(z,w) = \delta_{\mathbb{D}}(w,z)$.
(iv) $d_{\mathbb{D}}(z_1,z_3) \leq d_{\mathbb{D}}(z_1,z_2) + d_{\mathbb{D}}(z_2,z_3), \quad \forall z_1,z_2,z_3 \in \mathbb{D}$.

Demonstração: Trivial pelas mesmas propriedades de $d_{\mathbb{H}}$ (ver Proposição 5.1.5 e Teorema 5.1.11) . □

As rectas hiperbólicas, definidas como os conjuntos de pontos que verificam a igualdade na desigualdade triangular, são as imagens $J(\ell)$ das rectas hiperbólicas ℓ de $\mathbb{H}$.

Definição 5.2.4. *As **rectas hiperbólicas** de $\mathbb{D}$ são a restrição a $\mathbb{D}$ de*

- *rectas de $\mathbb{C}$ que passam na origem ou*
- *circunferências de $\mathbb{C}$ perpendiculares a $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.*

Nota 5.2.5. Se ℓ é uma recta hiperbólica de $\mathbb{H}$ então é perpendicular ao eixo real pelo que, como J é uma transfomação de Möbius, $J(\ell)$ é a restrição a $\mathbb{D}$ de uma circunferência de $\overline{\mathbb{C}}$ perpendicular a $J(\overline{\mathbb{R}}) = \partial\mathbb{D}$. Se esta circunferência é a união de uma recta de $\mathbb{C}$ com $\{\infty\}$ então, para ser perpendicular a $\partial\mathbb{D}$, tem de passar na origem (ver Figura 5.7).

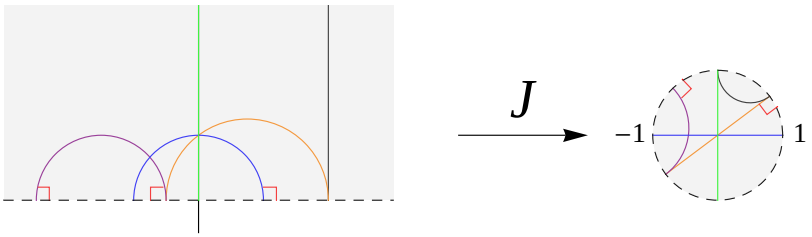

FIGURA 5.7. Rectas hiperbólicas em $\mathbb{D}$.

As isometrias de $\mathbb{D}$ são obtidas a partir das isometrias de $\mathbb{H}$ por conjugação com J pelo que os elementos do grupo de Möbius generalizado que levam $\mathbb{D}$ em $\mathbb{D}$, ou seja os elementos do grupo

$$G_{\mathbb{D}} := \{f \in \text{Möb} : \ f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}\}$$

são isometrias de $\mathbb{D}$. Veremos na Secção 5.4 que estas aplicações são, de facto, todas as isometrias de $\mathbb{D}$, ou seja que

$$Iso(\mathbb{D}) = G_{\mathbb{D}}.$$

TEOREMA 5.2.6. *Os elementos de $G_{\mathbb{D}}$ são as restrições a $\mathbb{D}$ das aplicações $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ da forma*

$$f(z) = \frac{Az + B}{\overline{B}z + \overline{A}} \quad ou \quad f(z) = \frac{A\overline{z} + B}{\overline{B}\overline{z} + \overline{A}}, \tag{5.2.1}$$

com $A, B \in \mathbb{C}$ e $|A|^2 - |B|^2 > 0$.

Demonstração: Uma aplicação $f \in$ Möb é tal que $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ se e só se $h := J^{-1} \circ f \circ J \in G_{\mathbb{H}}$. Então $f = J \circ h \circ J^{-1}$ onde $h \in G_{\mathbb{H}}$, pelo que

$$f(z) = J\left(\frac{aJ^{-1}(z) + b}{cJ^{-1}(z) + d}\right) = J\left(\frac{a\,\frac{-iz+1}{z-i} + b}{c\,\frac{-iz+1}{z-i} + d}\right) = J\left(\frac{(b - ai)z + a - bi}{(d - ci)z + c - di}\right)$$
$$= \frac{i\frac{(b-ai)z+a-bi}{(d-ci)z+c-di} + 1}{\frac{(b-ai)z+a-bi}{(d-ci)z+c-di} + i} = \frac{(a + d + i(b - c))z + b + c + (a - d)i}{(b + c - i(a - d))z + a + d - i(b - c)},$$

com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ e $ad-bc>0$ ou

$$f(z) = J\left(\frac{a\overline{J^{-1}(z)}+b}{c\overline{J^{-1}(z)}+d}\right) = J\left(\overline{\left(\frac{aJ^{-1}(z)+b}{cJ^{-1}(z)+d}\right)}\right) = J\left(\frac{(b+ai)\overline{z}+a+bi}{(d+ci)\overline{z}+c+di}\right)$$
$$= \frac{i\frac{(b+ai)\overline{z}+a+bi}{(d+ci)\overline{z}+c+di}+1}{\frac{(b+ai)\overline{z}+a+bi}{(d+ci)\overline{z}+c+di}+i} = \frac{(d-a+i(b+c))\overline{z}+c-b+(a+d)i}{(b-c+i(a+d))\overline{z}+a-d+i(b+c)}$$
$$= \frac{(b+c+i(a-d))\overline{z}+a+d+(b-c)i}{(a+d-i(b-c))\overline{z}+b+c-(a-d)i},$$

com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ e $ad-bc<0$.

No primeiro caso,

$$f(z) = \frac{Az+B}{\overline{B}z+\overline{A}}$$

com $A = a+d+i(b-c)$ e $B = b+c+i(a-d)$, pelo que

$$|A|^2-|B|^2 = (a+d)^2+(b-c)^2-(b+c)^2-(a-d)^2 = 4(ad-bc) > 0.$$

No segundo caso

$$f(z) = \frac{A\overline{z}+B}{\overline{B}\overline{z}+\overline{A}}$$

com $A = b+c+i(a-d)$ e $B = a+d+i(b-c)$, pelo que

$$|A|^2-|B|^2 = -\left((a+d)^2+(b-c)^2-(b+c)^2-(a-d)^2\right) = -4(ad-bc) > 0.$$

□

Alternativamente, os elementos de $G_{\mathbb{D}}$ podem ser descritos da seguinte forma.

TEOREMA 5.2.7. *Os elementos de $G_{\mathbb{D}}$ são as restrições a $\mathbb{D}$ das aplicações $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ da forma*

$$f(z) = e^{\alpha i}\frac{z-B}{-\overline{B}z+1} \quad \textit{ou} \quad f(z) = e^{\alpha i}\frac{\overline{z}-B}{-\overline{B}\overline{z}+1}, \tag{5.2.2}$$

com $\alpha \in [0,2\pi[$ e $B \in \mathbb{C}$ tal que $|B|<1$.

Demonstração: Se $f \in G_{\mathbb{D}}$ então

$$f(z) = \frac{Az+B}{\overline{B}z+\overline{A}} = \frac{A\left(z+\frac{B}{A}\right)}{\overline{A}\left(\frac{\overline{B}}{\overline{A}}z+1\right)} = e^{\alpha i}\frac{z+\frac{B}{A}}{\frac{\overline{B}}{\overline{A}}z+1} = e^{\alpha i}\frac{z+\widetilde{B}}{\widetilde{\overline{B}}z+1}$$

ou

$$f(z) = \frac{A\overline{z}+B}{\overline{B}\overline{z}+\overline{A}} = \frac{A\left(\overline{z}+\frac{B}{A}\right)}{\overline{A}\left(\frac{\overline{B}}{\overline{A}}\overline{z}+1\right)} = e^{\alpha i}\frac{\overline{z}+\frac{B}{A}}{\frac{\overline{B}}{\overline{A}}\overline{z}+1} = e^{\alpha i}\frac{\overline{z}+\widetilde{B}}{\widetilde{\overline{B}}\,\overline{z}+1}$$

para algum $\alpha \in [0, 2\pi)$ e $\widetilde{B} = \frac{B}{A}$. Note que $|\widetilde{B}| = \left|\frac{B}{A}\right| < 1$ pois $|A|^2 - |B|^2 > 0$, e que $A \neq 0$. □

5.3. Exemplos de isometrias

Os elementos de $G_{\mathbb{H}}$ e de $G_{\mathbb{D}}$ pertencem ao grupo de Möbius generalizado. Como tal transformam circunferências de $\overline{\mathbb{C}}$ (euclidianas ou hiperbólicas) em circunferências de $\overline{\mathbb{C}}$ e preservam ângulos (ver Teorema E.0.21).

Vejamos alguns exemplos destas isometrias hiperbólicas.

5.3.1. Reflexões. Seja ℓ a recta hiperbólica de $\mathbb{D}$ definida por $y = 0$ e a isometria $R^{\mathbb{D}}_{\ell} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ definida por

$$R^{\mathbb{D}}_{\ell}(z) := \overline{z}.$$

Esta aplicação coincide com a reflexão euclidiana na recta $y = 0$ e o seu conjunto de pontos fixos é a recta ℓ.

A isometria de $\mathbb{H}$ induzida por $R^{\mathbb{D}}_{\ell}$ é a restrição a $\mathbb{H}$ da inversão na circunferência unitária $\widetilde{\ell}$. Com efeito,

$$R^{\mathbb{H}}_{\widetilde{\ell}}(z) := \left(J^{-1} \circ R^{\mathbb{D}}_{\ell} \circ J\right)(z) = \left(J^{-1} \circ R^{\mathbb{D}}_{\ell}\right)\left(\frac{iz+1}{z+i}\right) = J^{-1}\left(\frac{-i\overline{z}+1}{\overline{z}-i}\right) = \frac{1}{\overline{z}}.$$

FIGURA 5.8. As rectas hiperbólicas $\ell \subset \mathbb{D}$ e $\widetilde{\ell} \subset \mathbb{H}$.

Se $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ é um elemento de $G_{\mathbb{D}}$ que transforma uma recta hiperbólica m na recta ℓ então

$$R^{\mathbb{D}}_{m} := g^{-1} \circ R^{\mathbb{D}}_{\ell} \circ g$$

é uma isometria de $\mathbb{D}$ que fixa os pontos de m (designada por reflexão na recta m). Como, dada uma recta hiperbólica m qualquer de $\mathbb{D}$, existe sempre um elemento $g \in G_{\mathbb{D}}$ tal que $h(m) = \ell$, obtemos reflexões em todas as rectas hiperbólicas de $\mathbb{D}$. Analogamente, temos reflexões em todas as rectas hiperbólicas de $\mathbb{H}$.

DEFINIÇÃO 5.3.1. *Uma **reflexão** de $\mathbb{D}$ (ou $\mathbb{H}$) é uma isometria obtida de $R^{\mathbb{D}}_{\ell}$ (ou $R^{\mathbb{H}}_{\widetilde{\ell}}$) por conjugação com um elemento de $G_{\mathbb{D}}$ (ou $G_{\mathbb{H}}$).*

NOTA 5.3.2. O conjunto de pontos fixos de uma reflexão é uma recta hiperbólica (de $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$). Veremos mais tarde que uma isometria de $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$ é uma reflexão se e só se o seu conjunto de pontos fixos é uma recta hiperbólica (ver Corolário 5.4.10).

EXEMPLO 5.3.3. Seja $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ a isometria definida por

$$g(z) = e^{-\frac{\pi}{2}i} z = -iz.$$

Esta aplicação, que corresponde a uma rotação de ângulo $-\frac{\pi}{2}$ em torno da origem, transforma a recta hiperbólica m definida por $x = 0$ na recta ℓ definida por $y = 0$. Assim,

$$R^{\mathbb{D}}_{m}(z) := g^{-1} \circ R^{\mathbb{D}}_{\ell} \circ g = g^{-1}(R^{\mathbb{D}}_{\ell}(-iz)) = g^{-1}(i\,\overline{z}) = -\overline{z}$$

é a reflexão em m. A aplicação correspondente em $\mathbb{H}$, a isometria $R^{\mathbb{H}}_{\widetilde{m}}$ definida por

$$R^{\mathbb{H}}_{\widetilde{m}}(z) := \left(J^{-1} \circ R^{\mathbb{D}}_{m} \circ J\right)(z) = -\overline{z},$$

é a reflexão na recta $x = 0$ de $\mathbb{H}$.

Conjugando $R^{\mathbb{H}}_{\widetilde{m}}$ com isometrias da forma

$$g(z) = z - b$$

com $b \in \mathbb{R}$, obtemos reflexões nas rectas hiperbólicas $x = b$. Como

$$\left(g^{-1} \circ R^{\mathbb{H}}_{\widetilde{m}} \circ g\right)(z) = g^{-1}(-(\overline{z} - b)) = -\overline{z} + 2b,$$

estas reflexões coincidem com as reflexões euclidianas nas rectas verticais $x = b$.

NOTA 5.3.4. Em geral, uma reflexão numa recta hiperbólica de $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$ que está contida numa circunferência euclidiana $\mathcal{C}$, coincide com a restriçao a $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$ da inversão em $\mathcal{C}$. Com efeito, note que qualquer uma destas aplicações é a restrição a $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$ de um elemento de $\mathrm{Möb}\backslash\mathrm{Möb}^{+}$ com $\mathcal{C}$ como conjunto de pontos fixos (ver Nota E.0.17 do Apêndice E e Teorema E.0.22 do Apêndice E). Analogamente, se a recta hiperbólica for parte de uma recta euclidiana, a reflexão coincide com a reflexão euclidiana nessa recta (ver Nota E.0.20 do Apêndice E).

5.3.2. Rotações. Seja $\rho^{\mathbb{D}}_{0,\alpha} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ a isometria

$$\rho^{\mathbb{D}}_{0,\alpha}(z) := e^{i\alpha} z,$$

com $\alpha \in [0, 2\pi[$. Esta aplicação coincide com a rotação euclidiana de ângulo α em torno da origem. Se $\alpha \neq 0$ tem um único ponto fixo em $\mathbb{D}$ (a origem) e não fixa nenhum ponto da fronteira $\partial\mathbb{D}$. Para além disso, deixa invariantes as circunferências hiperbólicas em torno da origem (ver Figura 5.9). Com efeito, estas são também circunferências euclidianas com centro na origem pois

$$\delta_{\mathbb{D}}(z, 0) = \left| \frac{z - 0}{1 - \overline{z} \cdot 0} \right| = |z|,$$

e uma rotação euclidiana deixa invariantes circunferências (euclidianas) em torno do centro da rotação.

Como $J^{-1}(0) = i$, a isometria $\rho^{\mathbb{H}}_{i,\alpha}$ induzida por $\rho^{\mathbb{D}}_{0,\alpha}$ em $\mathbb{H}$ tem um único ponto fixo em $\mathbb{H}$ (o ponto i) e não tem nenhum ponto fixo em $\overline{\mathbb{R}}$. Além disso, deixa invariantes as circunferências hiperbólicas de centro i (ver Figura 5.9), pois os pontos destas circunferências estão a uma distância hiperbólica constante de i e $J : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ é uma isometria. Note que

$$\rho^{\mathbb{H}}_{i,\alpha}(z) := \left(J^{-1} \circ \rho^{\mathbb{D}}_{0,\alpha} \circ J \right)(z) = \frac{-ie^{\alpha i}\left(\frac{iz+1}{z+i}\right) + 1}{e^{\alpha i}\left(\frac{iz+1}{z+i}\right) - i} = \frac{z + \frac{1-e^{\alpha i}}{1+e^{\alpha i}} i}{1 - \frac{1-e^{\alpha i}}{1+e^{\alpha i}} zi}$$

$$= \frac{z + \tan(\alpha/2)}{1 - \tan(\alpha/2)\, z}$$

e que a transformação de Möbius correspondente fixa os pontos i e $-i$ (mas apenas i está em $\mathbb{H}$).

Conjugando $\rho^{\mathbb{D}}_{0,\alpha}$ com um elemento $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ de $G_{\mathbb{D}}$ que leva um ponto z_0 em 0, obtemos uma isometria de $\mathbb{D}$ com um único ponto fixo em $\mathbb{D}$ (o ponto z_0) e nenhum ponto fixo em $\partial\mathbb{D}$. Com efeito, para $z \in \mathbb{D}$ temos

$$\left(g^{-1} \circ \rho^{\mathbb{D}}_{0,\alpha} \circ g \right)(z) = z \Leftrightarrow \rho^{\mathbb{D}}_{0,\alpha}(g(z)) = g(z) \Leftrightarrow g(z) = 0 \Leftrightarrow z = g^{-1}(0) = z_0.$$

Definição 5.3.5. *Uma **rotação** de $\mathbb{D}$ (ou $\mathbb{H}$) é uma isometria obtida de $\rho^{\mathbb{D}}_{0,\alpha}$ (ou $\rho^{\mathbb{H}}_{i,\alpha}$) por conjugação com um elemento de $G_{\mathbb{D}}$ (ou $G_{\mathbb{H}}$).*

Nota 5.3.6. Uma rotação não trivial tem um único ponto fixo em $\mathbb{D}$ (ou $\mathbb{H}$) e nenhum ponto fixo em $\partial\mathbb{D}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$). Além disso, uma rotação de centro z_0 deixa invariantes as circunferências hiperbólicas de centro z_0. Veremos mais tarde que uma isometria (de $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$) é uma rotação não trivial se e só se tem um único ponto fixo em $\mathbb{D}$ (ou $\mathbb{H}$) (ver Corolário 5.4.10).

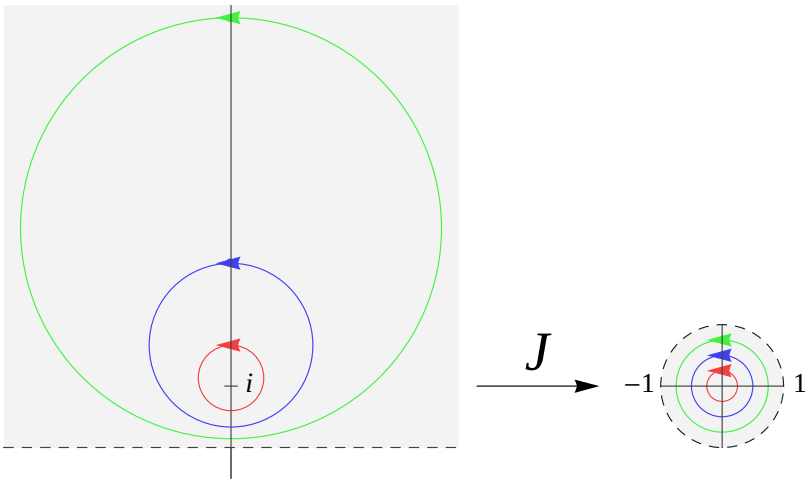

FIGURA 5.9. Circunferências hiperbólicas em $\mathbb{H}$ e $\mathbb{D}$, respectivamente de centro i e 0.

5.3.3. Translações hiperbólicas. Para $k \in \mathbb{R}^+$, seja $T_k^{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ a isometria definida por

$$T_k^{\mathbb{H}}(z) := kz.$$

Se $k \neq 1$ esta aplicação não tem pontos fixos em $\mathbb{H}$ mas a sua extensão a $\overline{\mathbb{C}}$ tem dois pontos fixos em $\overline{\mathbb{R}}$: os pontos 0 e ∞. Deixa invariantes as semirectas euclidianas $y = mx$ mas apenas deixa invariante uma recta hiperbólica: a recta ℓ definida por $x = 0$ (ver Figura 5.10). Esta recta hiperbólica une os pontos fixos de extensão de $T_k^{\mathbb{H}}$ a $\overline{\mathbb{C}}$.

Conjugando com um elemento de $G_{\mathbb{H}}$ que transforme uma recta hiperbólica n em ℓ, obtemos uma isometria que deixa n invariante (e nenhuma outra recta hiperbólica). Esta isometria não tem pontos fixos em $\mathbb{H}$ mas fixa dois pontos em $\overline{\mathbb{R}}$ (os pontos da intersecção $\overline{\mathbb{R}} \cap n$).

A isometria de $\mathbb{D}$ induzida por $T_k^{\mathbb{H}}$ é dada por

$$T_k^{\mathbb{D}}(z) := \left(J \circ T_k^{\mathbb{H}} \circ J^{-1}\right)(z) = \frac{(k+1)z + (k-1)i}{-(k-1)iz + k + 1}.$$

Se $k \neq 1$ esta aplicação não fixa nenhum ponto de $\mathbb{D}$ mas a sua extensão a $\mathbb{D}$ fixa dois pontos em $\partial\mathbb{D}$: os pontos i e $-i$. Para além disso, deixa invariante a recta hiperbólica definida por $x = 0$ (que une os dois pontos fixos).

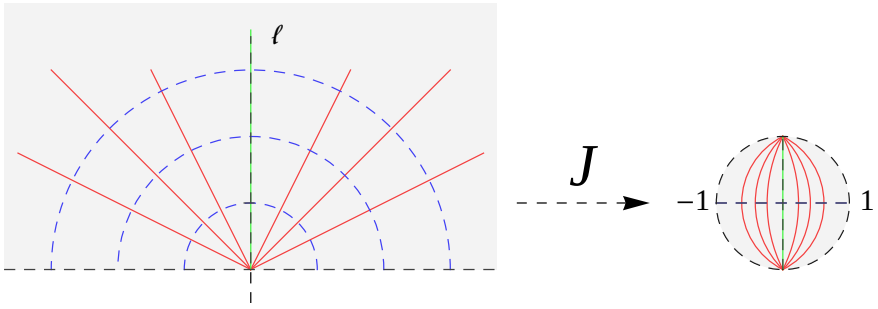

FIGURA 5.10. Curvas invariantes por $T_k^{\mathbb{H}}$ e por $T_k^{\mathbb{D}}$.

DEFINIÇÃO 5.3.7. *Uma* ***translação hiperbólica*** *de $\mathbb{D}$ (ou $\mathbb{H}$) ao longo de uma recta hiperbólica ℓ é uma isometria obtida de $T_k^{\mathbb{D}}$ (ou $T_k^{\mathbb{H}}$) por conjugação com um elemento de $G_{\mathbb{D}}$ (ou $G_{\mathbb{H}}$), para algum $k \in \mathbb{R}^+$.*

NOTA 5.3.8. Uma translação hiperbólica não trivial ao longo de uma recta hiperbólica ℓ não tem pontos fixos em $\mathbb{D}$ (ou $\mathbb{H}$) mas tem dois pontos fixos em $\partial\mathbb{D}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$). Além disso, a recta ℓ é a única recta hiperbólica invariante e esta recta intersecta $\partial\mathbb{D}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$) nos dois pontos fixos.

5.3.4. Rotações Limite. Para $\alpha \in \mathbb{R}$, seja $\rho_{\infty,\alpha}^{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ a isometria definida por

$$\rho_{\infty,\alpha}^{\mathbb{H}}(z) := z + \alpha.$$

Se $\alpha \neq 0$ esta isometria não tem pontos fixos em $\mathbb{H}$ e a sua extensão a $\overline{\mathbb{C}}$ tem um único ponto fixo em $\overline{\mathbb{R}}$: o ponto ∞. Deixa invariantes as rectas euclidianas horizontais $y = k$ (com $k \in \mathbb{R}^+$) mas nenhuma recta hiperbólica (ver Figura 5.12). Se unirmos estas rectas euclidianas com o ponto ∞ obtemos circunferências de $\overline{\mathbb{C}}$ (que passam em ∞) denominadas por **horociclos**.

Conjugando com um elemento de $G_{\mathbb{H}}$ que leve um ponto $z_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ em ∞, obtemos uma isometria sem pontos fixos em $\mathbb{H}$ cuja extensão a $\overline{\mathbb{C}}$ tem um único ponto fixo em $\overline{\mathbb{R}}$: o ponto z_0. Esta isometria deixa invariantes circunferências que passam em z_0 (também denominadas por horociclos).

A isometria de $\mathbb{D}$ induzida por $\rho_{\infty,\alpha}^{\mathbb{H}}$ é dada por

$$\rho_{i,\alpha}^{\mathbb{D}}(z) := \left(J \circ \rho_{\infty,\alpha}^{\mathbb{H}} \circ J^{-1}\right)(z) = \frac{(2+\alpha i)z + \alpha}{\alpha z + (2-\alpha i)}.$$

Esta aplicação não fixa nenhum ponto de $\mathbb{D}$ mas fixa o ponto $i \in \partial\mathbb{D}$. Para além disso, deixa invariantes as circunferências $J(\{y = k\} \cup \{\infty\})$ (horociclos). Estas passam em i e são tangentes a $\partial\mathbb{D}$ em i (ver Figura 5.12). Com efeito, as rectas $y = k$ são perpendiculares à recta hiperbólica ℓ definida por

$x = 0$, pelo que as circunferências $J(\{y = k\} \cup \{\infty\}) \subset \mathbb{D}$ são perpendiculares à recta hiperbólica $J(\ell)$ (de equação $x = 0$) e, por isso, são tangentes a $\partial\mathbb{D}$.

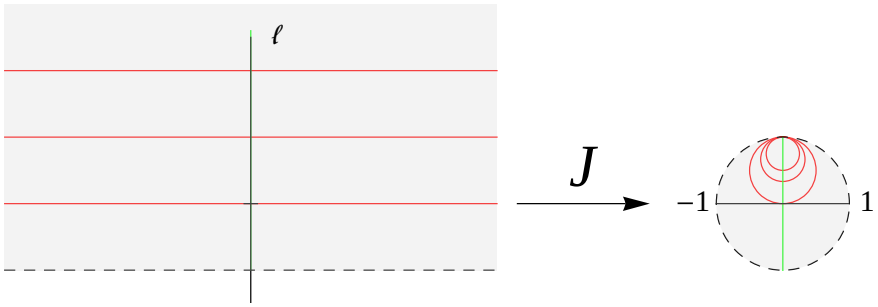

FIGURA 5.11. Horociclos de $\rho^{\mathbb{H}}_{\infty,\alpha}$ e de $\rho^{\mathbb{D}}_{i,\alpha}$.

DEFINIÇÃO 5.3.9. *Uma* ***rotação limite*** *de $\mathbb{D}$ (ou $\mathbb{H}$) em torno de um ponto z_0 de $\partial\mathbb{D}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$) é uma isometria obtida de $\rho^{\mathbb{D}}_{i,\alpha}$ (ou $\rho^{\mathbb{H}}_{\infty,\alpha}$) por conjugação com um elemento de $G_{\mathbb{D}}$ (ou $G_{\mathbb{H}}$), para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.*

NOTA 5.3.10. Uma rotação limite não trivial de centro z_0 não tem pontos fixos em $\mathbb{D}$ (ou $\mathbb{H}$) mas tem um único ponto fixo em $\partial\mathbb{D}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$). Além disso, deixa invariantes circunferências de $\overline{\mathbb{C}}$ que passam em z_0 e que são tangentes a $\partial\mathbb{D}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$) em z_0. Veremos mais tarde que uma isometria (de $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$) é uma rotação limite se e só se não tem pontos fixos em $\mathbb{D}$ (ou $\mathbb{H}$) mas fixa um único ponto fixo em $\partial\mathbb{D}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$) (ver Corolário 5.4.10).

Terminamos esta secção com uma proposição que irá caracterizar o conjunto de pontos fixos de uma transformação de Möbius em $G_{\mathbb{D}}$ ou $G_{\mathbb{H}}$ (ver Corolário 5.4.3 e Teorema 5.4.8).

PROPOSIÇÃO 5.3.11. *Seja $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ uma transformação de Möbius em $G_{\mathbb{D}}$ (ou $G_{\mathbb{H}}$). Então,*

(a) se f tem um ponto fixo em $\mathbb{D}$ (ou $\mathbb{H}$), então não tem nenhum outro ponto fixo em $\mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$ (ou $\mathbb{H} \cup \overline{\mathbb{R}}$);

(b) se f tem um único ponto fixo em $\partial\mathbb{D}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$) então não tem nenhum outro ponto fixo em $\overline{\mathbb{C}}$;

(c) se f tem dois pontos fixos em $\partial\mathbb{D}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$) então não tem nenhum outro ponto fixo em $\overline{\mathbb{C}}$.

Demonstração: Pela Proposição E.0.3 sabemos que uma transformação de Möbius diferente da identidade tem, no máximo, dois pontos fixos, pelo que (c) é trivial. Por outro lado, podemos considerar apenas o caso de $\mathbb{H}$ pois os elementos de $G_{\mathbb{D}}$ podem ser obtidas a partir dos de $\mathbb{H}$ por conjugação com $J : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$. Com efeito, transformações de Möbius conjugadas têm o mesmo ńumero de pontos fixos (note que $J(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$ e que, consequentemente, $J(\overline{\mathbb{R}}) = \partial\mathbb{D}$).

Considere-se então

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc > 0$. Assim,

$$f(z) = z \Leftrightarrow az + b = cz^2 + dz \Leftrightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0.$$

Se $c = 0$ e $a \neq d$ então f tem dois pontos fixos em $\overline{\mathbb{R}}$ (os pontos ∞ e $\frac{b}{d-a}$) e estes são os seus únicos pontos fixos.

Se $c = 0$ e $a = d$ então f tem um único ponto fixo: $z_0 = \infty \in \overline{\mathbb{R}}$.

Se $c \neq 0$ os pontos fixos são da forma

$$z = -\frac{(d-a)}{2c} \pm \frac{\sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c}.$$

Se f tem um ponto fixo em $\mathbb{H}$ então $(d-a)^2 + 4bc < 0$, pelo que f tem dois pontos fixos conjugados e então (a) é verificada. Se f tem um único ponto fixo z_0 então $(d-a)^2 + 4bc = 0$, pelo que $z_0 \in \mathbb{R}$. □

5.4. Classificação de Isometrias

Para procedermos à classificação das isometrias de $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{D}$ necessitamos de alguns resultados preliminares. O primeiro caracteriza o conjunto dos pontos equidistantes de dois pontos de $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{D}$ (para a distância hiperbólica).

Proposição 5.4.1. *Dados dois pontos P_1, P_2 de $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{D}$, o conjunto de pontos equidistantes de P_1 e P_2 (para a distância hiperbólica) é uma recta hiperbólica ℓ. Além disso, $R_\ell(P_1) = P_2$ e $R_\ell(P_2) = P_1$, onde R_ℓ é a reflexão hiperbólica na recta ℓ.*

Demonstração: Vamos considerar o caso em que $P_1, P_2 \in \mathbb{H}$ (o resultado em $\mathbb{D}$ é análogo). Seja L o conjunto de pontos equidistantes de P_1 e P_2 i.e.

$$L := \{X \in \mathbb{H} : d_{\mathbb{H}}(X, P_1) = d_{\mathbb{H}}(X, P_2)\}.$$

Compondo com uma isometria apropriada (por exemplo uma rotação de centro P_1 seguida de uma rotação limite em torno de ∞) podemos supor

que $\mathrm{Im}(P_1) = \mathrm{Im}(P_2)$ e que $\mathrm{Re}(P_1) = -\mathrm{Re}(P_2)$. Assim, a recta hiperbólica ℓ definida por $x = 0$ está contida em L pois $R_\ell(P_1) = P_2$ e, se $X \in \ell$, temos

$$d_{\mathbb{H}}(X, P_1) = d_{\mathbb{H}}(R_\ell(X), R_\ell(P_1)) = d_{\mathbb{H}}(X, P_2).$$

Vejamos agora que $\ell = L$. Seja R um ponto em $L \setminus \ell$. Então o ponto $R' := R_\ell(R)$ também está em $L \setminus \ell$. Com efeito,

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(R', P_1) &= d_{\mathbb{H}}(R_\ell(R'), R_\ell(P_1)) = d_{\mathbb{H}}(R, P_2) = d_{\mathbb{H}}(R, P_1) \\ &= d_{\mathbb{H}}(R_\ell(R), R_\ell(P_1)) = d_{\mathbb{H}}(R', P_2), \end{aligned}$$

pois, como $R \in L$, temos $d_{\mathbb{H}}(R, P_1) = d_{\mathbb{H}}(R, P_2)$.

Supondo, sem perda de generalidade, que $\mathrm{Re}(R')\cdot\mathrm{Re}\,(P_2) > 0$ (i.e. que R' e P_2 estão do mesmo lado de ℓ), seja m a (única) recta hiperbólica que passa por R e P_2 e considere-se $m' := R_\ell(m)$. Então m' é a única recta hiperbólica que passa em P_1 e R'. Para além disso, como m' é obtida a partir de m por reflexão em ℓ, temos que $m \cap m' \cap \ell$ consiste num único ponto $Q \in \ell$. Note que se $m = m'$ então P_1, P_2, R e R' estariam na mesma recta hiperbólica, pelo que se verificaria a igualdade na desigualdade triangular e então R não poderia pertencer a $L \setminus \ell$. Com efeito teríamos

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(P_1, P_2) &= d_{\mathbb{H}}(P_1, R) + d_{\mathbb{H}}(R, R') + d_{\mathbb{H}}(R', P_2) \\ &= d_{\mathbb{H}}(P_2, R) + d_{\mathbb{H}}(R, R') + d_{\mathbb{H}}(R_\ell(R'), R_\ell(P_2)) \\ &= d_{\mathbb{H}}(P_2, R) + d_{\mathbb{H}}(R, R') + d_{\mathbb{H}}(R, P_1) = d_{\mathbb{H}}(P_1, P_2) + d_{\mathbb{H}}(R, R'), \end{aligned}$$

o que implica que $R = R'$, ou seja que $R \in \ell$.

Conclui-se assim que $m \neq m'$ e então,

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(P_2, R') &= d_{\mathbb{H}}(R_\ell(P_2), R_\ell(R')) = d_{\mathbb{H}}(P_1, R) = d_{\mathbb{H}}(P_2, R) \\ &= d_{\mathbb{H}}(P_2, Q) + d_{\mathbb{H}}(Q, R) = d_{\mathbb{H}}(P_2, Q) + d_{\mathbb{H}}(Q, R'), \end{aligned}$$

o que implica que Q pertence à recta hiperbólica que passa em P_2 e R' o que é impossível pois, nesse caso, R' pertenceria a m e então os pontos P_1, P_2, Q, R, R' estariam em m, pelo que $m = m'$. □

Como consequência da proposição anterior podemos caracterizar as isometrias como composições de reflexões.

Teorema 5.4.2. *Qualquer isometria de $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$ é a composta de uma duas ou três reflexões hiperbólicas.*

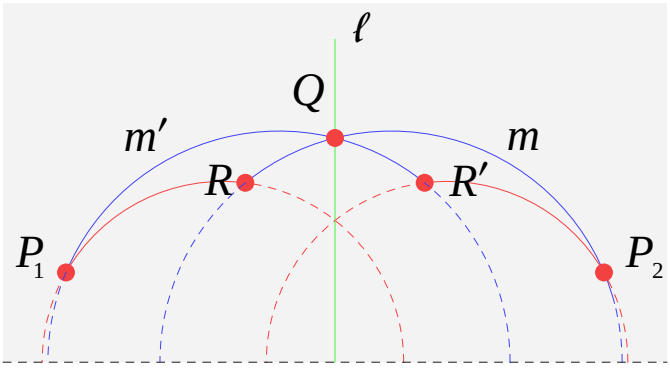

FIGURA 5.12

Demonstração: Um ponto de $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$ fica univocamente determinado pelas suas distâncias a três pontos distintos que não estejam na mesma recta hiperbólica. Com efeito, se dois pontos X e X' estão às mesmas distâncias de três pontos não colineares P_1, P_2 e P_3, então P_1, P_2 e P_3 estariam no conjunto de pontos equidistantes de X e X' pelo que estariam numa mesma recta hiperbólica (cf. Proposição 5.4.1).

Então, se uma isometria fixa três pontos P_1, P_2, P_3 não colineares é necessariamente a identidade pois,

$$d(X, P_i) = d(f(X), f(P_i)) = d(f(X), P_i), \ \ i = 1, 2, 3,$$

pelo que $f(X) = X$ para todo o X.

Sejam então P_1, P_2, P_3 três pontos distintos de $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$ que não estão na mesma recta hiperbólica e considere-se as imagens $f(P_1)$, $f(P_2)$ e $f(P_3)$. Se f é a identidade então é trivialmente a composta de duas reflexões. Caso contrário, se $f \neq id$, então f tem no máximo dois pontos fixos em $\{P_1, P_2, P_3\}$, pelo que $f(P_i) \neq P_i$ para algum $i \in \{1, 2, 3\}$.

Supondo que $f(P_1) \neq P_1$, considera-se a recta hiperbólica ℓ dos pontos equidistantes de P_1 e $f(P_1)$ e então $R_\ell(P_1) = f(P_1)$. Se $R_\ell(P_j) = f(P_j)$ para $j = 2, 3$, então $f = R_\ell$ pois $R_\ell \circ f$ fixa três pontos não colineares pelo que é a identidade. Caso contrário, e supondo que $f(P_2) \neq R_\ell(P_2)$ considera-se a recta m dos pontos equidistantes de $f(P_2)$ e $R_\ell(P_2)$. Então $R_m(R_\ell(P_2)) = f(P_2)$ e

$$(R_m \circ R_\ell)(P_1) = R_m(f(P_1)) = f(P_1)$$

pois $f(P_1) \in m$. Com efeito,

$$d(f(P_1), f(P_2)) = d(P_1, P_2) = d(R_\ell(P_1), R_\ell(P_2)) = d(f(P_1), R_\ell(P_2)).$$

Se $(R_m \circ R_\ell)(P_3) = f(P_3)$ então $f = R_m \circ R_\ell$. Caso contrário, considera-se a recta n dos pontos equidistantes de $f(P_3)$ e $(R_m \circ R_\ell)(P_3)$. Então, $R_n((R_m \circ R_\ell)(P_3)) = f(P_3)$ e, por outro lado,

$$(R_n \circ R_m \circ R_\ell)(P_i) = R_n(f(P_i)) = f(P_i)$$

para $i = 1, 2$ pois $f(P_i) \in n$. De facto,

$$\begin{aligned} d(f(P_i), f(P_3)) &= d(P_i, P_3) = d((R_m \circ R_\ell)(P_i), (R_m \circ R_\ell)(P_3)) \\ &= d(f(P_i), (R_m \circ R_\ell)(P_3)). \end{aligned}$$

Conclui-se assim que, neste caso, $f = R_n \circ R_m \circ R_\ell$. □

Corolário 5.4.3. *Os grupos de isometrias de $\mathbb{H}$ e de $\mathbb{D}$ são respectivamente os grupos $G_{\mathbb{H}}$ e $G_{\mathbb{D}}$.*

Demonstração: Como as reflexões hiperbólicas de $\mathbb{D}$ (ou $\mathbb{H}$) são elementos de $G_{\mathbb{D}}$ (ou de $G_{\mathbb{H}}$), temos que o grupo $Iso(\mathbb{D})$ (ou $Iso(\mathbb{H})$) de isometrias de $\mathbb{D}$ (ou de $\mathbb{H}$) está contido em $G_{\mathbb{D}}$ (ou $G_{\mathbb{H}}$). Como sabíamos já que $G_{\mathbb{D}} \subset Iso(\mathbb{D})$ (e $G_{\mathbb{H}} \subset Iso(\mathbb{H})$), o resultado segue. □

Definição 5.4.4. *Uma isometria de $\mathbb{D}$ (ou $\mathbb{H}$) diz-se **directa** se for a composta de duas reflexões e **inversa** caso contário.*

Para concluir a classificação das isometrias hiperbólicas, necessitamos de dois lemas auxiliares.

Lema 5.4.5. *Se l e m são duas rectas hiperbólicas que não se intersectam em $\mathbb{H} \cup \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$) então existe uma única recta hiperbólica n perpendicular a l e a m.*

Nota 5.4.6. Duas rectas hiperbólicas que não se intersectam em $\mathbb{H} \cup \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$) dizem-se **ultraparalelas**.

Demonstração: Se l e m são duas rectas hiperbólicas ultraparalelas de $\mathbb{H}$ e l é definida pela equação $\operatorname{Re} z = 0$ (o que implica que m é definida por uma equação da forma $|z - c| = r$), então as rectas perpendiculares a l têm equações da forma $|z| = c$. Para que uma destas rectas, n, seja perpendicular a m é necessário que n seja tangente a um raio de m ou, equivalentemente, que um raio de n seja tangente a m. Considere-se a única semirecta euclidiana com início na origem e que intersecta m num só ponto. Seja z_0 esse ponto de intersecção. Então a recta hiperbólica de equação $|z| = |z_0|$ é a única recta perpendicular a l e m (ver Figura 5.13).

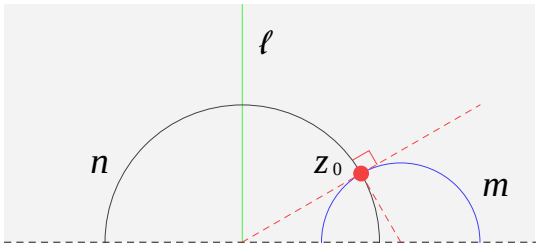

FIGURA 5.13

Se l não é a recta l' definida por $\operatorname{Re} z = 0$, podemos considerar uma isometria directa $h : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ tal que $h(l) = l'$. Com efeito, se l é definida por uma equação da forma $\operatorname{Re} z = c$, podemos tomar, por exemplo, a isometria $h(z) = z - c$. Caso contrário, l intersecta o eixo real em dois pontos $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ com $z_1 < z_2$, e podemos tomar, por exemplo, $h(z) = \frac{z-z_2}{z-z_1}$. Como m é ultraparalela a ℓ, temos que $h(m)$ é ultraparalela a $\ell' = h(l)$. Consequentemente, existe uma única recta n perpendicular a $h(l)$ e $h(m)$. Então $h^{-1}(n)$ é a única recta perpendicular a l e a m pois, como h é um elemento de Möb, preserva ângulos (ver Teorema E.0.21).

Se l e m são duas rectas hiperbólicas ultraparalelas de $\mathbb{D}$ então $J^{-1}(l)$ e $J^{-1}(m)$ são duas rectas ultraparalelas de $\mathbb{H}$ pelo que existe uma única recta de $\mathbb{H}$ perpendicular a $J^{-1}(l)$ e $J^{-1}(m)$. Conclui-se assim que $J(n)$ é a única recta de $\mathbb{D}$ perpendicular a l e m pois, como J é uma transformação de Möbius, preserva ângulos (ver Teorema E.0.14). □

LEMA 5.4.7. *Se f é uma isometria inversa de $\mathbb{D}$ (ou $\mathbb{H}$) então a sua extensão a $\overline{\mathbb{C}}$ tem dois pontos fixos em $\partial\mathbb{D}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$).*

Demonstração: Seja $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ uma isometria inversa de $\mathbb{H}$ definida por

$$f(z) = \frac{a\overline{z} + b}{c\,\overline{z} + d}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc < 0$. Então, $x \in \mathbb{R}$ é um ponto fixo da extensão de f a $\overline{\mathbb{C}}$ se e só se

$$f(x) = x \Leftrightarrow cx^2 + (d - a)x - b = 0.$$

Se $c = 0$ então $a \neq d$ (pois $ad < 0$) e f tem dois pontos fixos em $\overline{\mathbb{R}}$ (os pontos ∞ e $x = \frac{b}{d-a}$).

Se $c \neq 0$ então f tem dois pontos fixos reais

$$x = \frac{-(d-a) \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c},$$

pois

$$(d-a)^2+4bc = d^2+a^2-4(ad-bc)+2ad = (a+d)^2-4(ad-bc) > 0.$$

Se f é uma isometria inversa de $\mathbb{D}$ então $g := J^{-1}\circ f\circ J$ é uma isometria inversa de $\mathbb{H}$ pelo que g tem dois pontos fixos em $\overline{\mathbb{R}}$. Como $J(\overline{\mathbb{R}}) = \partial\mathbb{D}$, conclui-se que f tem dois pontos fixos em $\partial\mathbb{D}$. □

Podemos agora proceder à classificação das isometrias hiperbólicas.

TEOREMA 5.4.8. *Qualquer isometria hiperbólica (de $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$) é de um dos seguintes tipos.*

(i) Rotação hiperbólica;
(ii) Rotação limite;
(iii) Translação hiperbólica ao longo de uma recta hiperbólica;
(iv) Reflexão numa recta hiperbólica;
(v) Reflexão deslizante ao longo duma recta hiperbólica (i.e. a composta de uma reflexão com uma translação hiperbólica ao longo da recta de reflexão).

Demonstração: Se f é uma isometria directa então é a restrição a $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{D}$ de uma transformação de Möbius $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$. Além disso, pelo Teorema 5.4.2, é necessariamente a composta de duas reflexões $R_l \circ R_m$ onde l e m são duas rectas hiperbólicas.

(1) Se l e m se intersectam num ponto z_0 de $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$ (ver Figura 5.14) então z_0 é um ponto fixo de f. Note que, neste caso, a isometria f não tem nenhum outro ponto fixo em $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$ (ver Proposição 5.3.11).

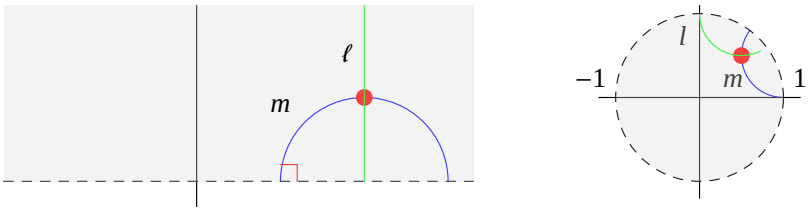

FIGURA 5.14. Exemplos de rectas concorrentes em $\mathbb{H}$ e $\mathbb{D}$.

Se f é uma isometria de $\mathbb{D}$ e $z_0 = 0$, então l e m são parte de rectas euclidianas que passam na origem e R_l e R_m são restrições a $\mathbb{D}$ das reflexões (euclidianas) nessas rectas. Consequentemente, $R_l \circ R_m$ é uma rotação em torno da origem,

$$R_l \circ R_m = \rho^{\mathbb{D}}_{0,2\alpha},$$

onde $\alpha = \measuredangle_{\text{or}}(m, l)$ é o ângulo orientado entre a rectas m e l (ver Secção 5.3.2). Se $z_0 \neq 0$ então, conjugando com uma isometria directa $h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tal que $h(z_0) = 0$ (por exemplo a isometria $h(z) = \frac{z - z_0}{-\bar{z}_0\, z + 1}$), temos que

$$h \circ R_l \circ h^{-1} \quad \text{e} \quad h \circ R_m \circ h^{-1}$$

são reflexões em rectas hiperbólicas de $\mathbb{D}$ que passam na origem. Assim,

$$\left(h \circ R_l \circ h^{-1}\right) \circ \left(h \circ R_m \circ h^{-1}\right) = h \circ (R_l \circ R_m) \circ h^{-1} = \rho^{\mathbb{D}}_{0,2\alpha},$$

onde $\alpha = \measuredangle_{\text{or}}(h(m), h(l)) = \measuredangle_{\text{or}}(m, l)$, pois as isometrias hiperbólicas preservam ângulos (e, como h é uma isometria directa, preserva a orientação). Então

$$R_l \circ R_m = h^{-1} \circ \rho^{\mathbb{D}}_{0,2\alpha} \circ h$$

pode ser obtida por conjugação de uma rotação por uma isometria directa, pelo que é também uma rotação. Em particular, $R_l \circ R_m$ é a rotação de centro z_0 e ângulo $\alpha = \measuredangle_{\text{or}}(m, l)$.

Se f é uma isometria de $\mathbb{H}$ então $g := J \circ f \circ J^{-1}$ é uma isometria de $\mathbb{D}$ que fixa o ponto $J(z_0) \in \mathbb{D}$ e é a composta de duas reflexões em rectas hiperbólicas de $\mathbb{D}$ que se intersectam em $J(z_0)$. Então g é uma rotação em torno de $J(z_0)$, pelo que f é uma rotação em torno de z_0 com o mesmo ângulo.

(2) Se l e m se intersectam num (único) ponto z_0 de $\partial\mathbb{D}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$ então z_0 é um ponto fixo da transformação de Möbius $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ (ver Figura 5.15). Note que, pela Proposição 5.3.11, a transformação de Möbius f não tem nenhum outro ponto fixo em $\overline{\mathbb{C}}$.

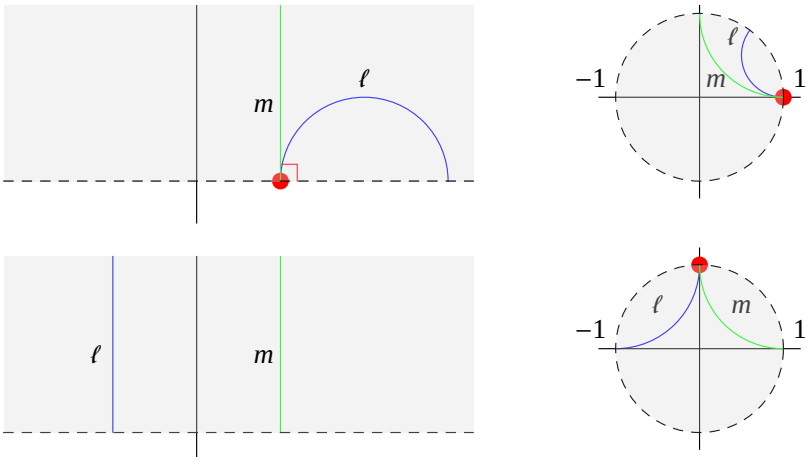

FIGURA 5.15. Exemplos de rectas paralelas em $\mathbb{H}$ e $\mathbb{D}$.

Se f é uma isometria de $\mathbb{H}$ e $z_0 = \infty$, então l e m são duas rectas verticais definidas respectivamente por equações $\operatorname{Re} z = a$ e $\operatorname{Re} z = b$ onde $a, b \in \mathbb{R}$, e R_l e R_m são as restrições a $\mathbb{H}$ das reflexões euclidianas nessas rectas. Então $R_l \circ R_m$ é uma rotação limite em torno de ∞,

$$(R_l \circ R_m)(z) = z + 2(a - b)$$

(ver Secção 5.3.4). Se $z_0 \neq \infty$, conjugando com uma isometria directa $h : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ tal que $h(z_0) = \infty$ (por exemplo a isometria $h(z) = -\frac{1}{z - z_0}$), temos que

$$h \circ R_l \circ h^{-1} \quad \text{e} \quad h \circ R_m \circ h^{-1}$$

são reflexões em rectas hiperbólicas de $\mathbb{H}$ que passam em ∞. Assim,

$$g := \left(h \circ R_l \circ h^{-1}\right) \circ \left(h \circ R_m \circ h^{-1}\right) = h \circ (R_l \circ R_m) \circ h^{-1}$$

é uma rotação limite em torno de ∞. Então,

$$f = R_l \circ R_m = h^{-1} \circ g \circ h$$

pode ser obtida por conjugação da rotação limite g por uma isometria de $\mathbb{H}$, pelo que é também uma rotação limite (de centro $z_0 \in \overline{\mathbb{R}}$).

Se f é uma isometria de $\mathbb{D}$ então $g := J^{-1} \circ f \circ J$ é uma isometria de $\mathbb{H}$ que fixa o ponto $J^{-1}(z_0) \in \overline{\mathbb{R}}$ e é a composta de duas reflexões em rectas hiperbólicas de $\mathbb{H}$ que se intersectam em $J^{-1}(z_0)$. Então g é uma rotação limite em torno de $J^{-1}(z_0)$, pelo que f é uma rotação limite em torno de z_0 com o mesmo ângulo.

(3) Se l e m são ultraparalelas, i.e. não se intersectam em $\mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H} \cup \overline{\mathbb{R}}$ (ver Figura 5.16), então, pelo Lema 5.4.5, existe uma única recta hiperbólica n que é perpendicular a m e a l. Note que R_l e R_m deixam n invariante. Com efeito, $R_l(n)$ é uma recta hiperbólica perpendicular a $R_l(l) = l$ que passa no ponto da intersecção $l \cap n$ pelo que é necessariamente igual n, e o mesmo se conclui para R_m. Consequentemente, se $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ forem as extremidades de n, temos

$$R_l(\{z_1, z_2\}) = \{z_1, z_2\} \quad \text{e} \quad R_m(\{z_1, z_2\}) = \{z_1, z_2\}.$$

Como z_1, z_2 não são pontos fixos de R_l nem de R_m (pois não pertencem a $l \cup m$), temos

$$R_l(z_i) = z_j \quad \text{e} \quad R_m(z_i) = z_j, \quad \text{com} \quad i, j \in \{1, 2\} \quad \text{e} \quad i \neq j,$$

e então

$$f(z_i) = (R_l \circ R_m)(z_i) = z_i \quad i = 1, 2.$$

Conclui-se assim que a transformação de Möbius f tem dois pontos fixos em $\partial\mathbb{D}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$ e que não tem nenhum outro ponto fixo em $\overline{\mathbb{C}}$ (ver Proposição 5.3.11).

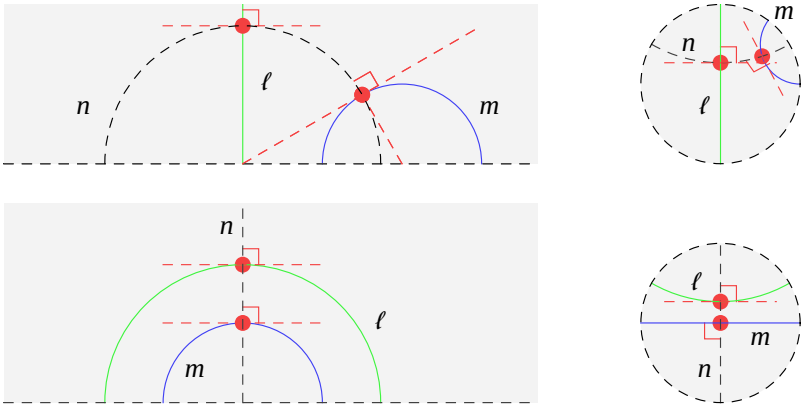

FIGURA 5.16. Exemplos de rectas ultraparalelas em $\mathbb{H}$ e $\mathbb{D}$.

Se f é uma isometria de $\mathbb{H}$ e n é a recta $\operatorname{Re} z = 0$ então l e m são rectas hiperbólicas definidas respectivamente por equações $|z| = a$ e $|z| = b$ (pois são perpendiculares a n). Então,

$$R_l(z) = \frac{a^2}{\overline{z}}, \quad R_m(z) = \frac{b^2}{\overline{z}} \quad \text{e} \quad f(z) = (R_l \circ R_m)(z) = \frac{a^2}{b^2}\, z,$$

pelo que f é uma translação hiperbólica ao longo de n (ver Secção 5.3.3).

Se n não é a recta n' definida por $\operatorname{Re} z = 0$, podemos conjugar com uma isometria directa $h : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ tal que $h(n) = n'$. Com efeito, se n é definida por uma equação $\operatorname{Re} z = c$, podemos tomar, por exemplo, a isometria $h(z) = z - c$. Caso contrário, n intersecta o eixo real em dois pontos $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ com $z_1 < z_2$, e podemos tomar, por exemplo, $h(z) = \frac{z - z_2}{z - z_1}$. Então,

$$h \circ R_l \circ h^{-1} \quad \text{e} \quad h \circ R_m \circ h^{-1}$$

são reflexões em rectas hiperbólicas de $\mathbb{H}$ perpendiculares a n', pelo que

$$g := \left(h \circ R_l \circ h^{-1}\right) \circ \left(h \circ R_m \circ h^{-1}\right) = h \circ (R_l \circ R_m) \circ h^{-1}$$

é uma translação hiperbólica ao longo de n'. Assim,

$$f = R_l \circ R_m = h^{-1} \circ g \circ h$$

pode ser obtida por conjugação de uma translação hiperbólica por uma isometria, pelo que é uma translação hiperbólica ao longo de $h^{-1}(n') = n$.

Se f é uma isometria de $\mathbb{D}$ então $g := J^{-1} \circ f \circ J$ é uma isometria de $\mathbb{H}$ que é a composta de duas reflexões em rectas hiperbólicas ultraparalelas de $\mathbb{H}$, pelo que é uma translação hiperbólica ao longo de $J^{-1}(n)$. Consequentemente f é uma translação hiperbólica ao longo de n.

(4) e **(5)** Se f é uma isometria inversa então, pelo Lema 5.4.7, sabemos que f tem dois pontos fixos em $\partial\mathbb{D}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$. Seja l a recta hiperbólica que une esses dois pontos fixos. Se f fixa l então f é uma reflexão na recta l pois $f \circ R_l$ é uma isometria directa com três pontos fixos pelo que é a identidade (ver Corolário E.0.4). Caso contrário, $f \circ R_l$ é uma isometria **directa** que fixa as extremidades de l, pelo que tem dois pontos fixos em $\partial\mathbb{D}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$. Pela primeira parte desta demonstração, conclui-se que f é uma translação hiperbólica T_l ao longo de l. Consequentemente, $f = T_l \circ R_l$ é uma reflexão com deslize ao longo de l. □

Nota 5.4.9. Sejam T_l e R_l respectivamente uma translação hiperbólica e uma reflexão numa mesma recta recta hiperbólica l de $\mathbb{H}$ (ou $\mathbb{D}$). Então as duas isometrias comutam, i.e.

$$T_l \circ R_l = R_l \circ T_l.$$

Com efeito, se $l \subset \mathbb{H}$ é a recta de equação $\operatorname{Re} z = 0$, temos

$$T_l(z) = \lambda\, z \quad \text{e} \quad R_l(z) = -\overline{z}$$

com $\lambda \in \mathbb{R}^+$, pelo que

$$(T_l \circ R_l)(z) = (R_l \circ T_l)(z) = -\lambda\overline{z}. \tag{5.4.1}$$

Caso contrário, podemos considerar uma isometria directa $h : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ tal que $h(l) = l'$ é a recta de equação $\operatorname{Re} z = 0$. Com efeito, se l é definida por uma equação $\operatorname{Re} z = c$, podemos tomar, por exemplo, a isometria $h(z) = z - c$. Se l intersecta o eixo real em dois pontos $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ com $z_1 < z_2$, podemos tomar, por exemplo, $h(z) = \frac{z-z_2}{z-z_1}$. Então, $h(l)$ é a recta definida por $\operatorname{Re} z = 0$, a isometria $h \circ T_l \circ h^{-1}$ é uma translação hiperbólica ao longo da recta l', e $h \circ R_l \circ h^{-1}$ é a reflexão na recta l'. Como vimos em (5.4.1), estas duas isometrias comutam, pelo que

$$\begin{aligned} h \circ (T_l \circ R_l) \circ h^{-1} &= \left(h \circ T_l \circ h^{-1}\right) \circ \left(h \circ R_l \circ h^{-1}\right) \\ &= \left(h \circ R_l \circ h^{-1}\right) \circ \left(h \circ T_l \circ h^{-1}\right) = h \circ (R_l \circ T_l) \circ h^{-1} \end{aligned}$$

e assim,

$$T_l \circ R_l = h^{-1}\left(h \circ (T_l \circ R_l) \circ h^{-1}\right) \circ h = h^{-1}\left(h \circ (R_l \circ T_l) \circ h^{-1}\right) \circ h = R_l \circ T_l.$$

Usando a aplicação $J : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$, podemos concluir o mesmo resultado em $\mathbb{D}$.

Como consequência do Teorema 5.4.8 podemos determinar cada tipo de isometria sabendo apenas o seu conjunto de pontos fixos.

COROLÁRIO 5.4.10. *Se uma isometria hiperbólica* ***directa*** *f de $\mathbb{D}$ (ou $\mathbb{H}$) diferente da identidade fixa*

(i) um (único) ponto em $\mathbb{D}$ (ou $\mathbb{H}$) então f é uma ***rotação hiperbólica*** *em torno desse ponto fixo;*

(ii) um único ponto em $\partial\mathbb{D}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$) então f é uma ***rotação limite*** *em torno desse ponto;*

(iii) dois pontos em $\partial\mathbb{D}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$) então f é uma ***translação hiperbólica*** *ao longo da recta hiperbólica que une os dois pontos fixos.*

Se uma isometria hiperbólica ***inversa*** *f de $\mathbb{D}$ (ou $\mathbb{H}$) fixa*

(iv) os pontos de uma recta hiperbólica l então f é a ***reflexão*** *em l;*

(v) dois pontos em $\partial\mathbb{D}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$) e nenhum outro ponto em $\mathbb{D}$ (ou $\mathbb{H}$) então f é uma ***reflexão deslizante*** *ao longo da recta hiperbólica que une os dois pontos fixos.*

EXEMPLO 5.4.11. Seja $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ a isometria definida por

$$f(z) = \frac{2z+1}{z+1}.$$

Os seus pontos fixos são as soluções da equação

$$f(z) = z \Leftrightarrow 2z+1 = z^2+z \Leftrightarrow z^2 - z - 1 = 0,$$

ou seja, os pontos $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ e $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$. Como os dois pertencem a $\mathbb{R}$ temos que f (uma isometria directa) é uma translação ao longo da recta que une os dois pontos fixos, ou seja a recta hiperbólica de equação $|z - \frac{1}{2}| = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

EXEMPLO 5.4.12. Seja $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ a isometria definida por

$$f(z) = \frac{2\overline{z}+3}{\overline{z}+1}.$$

Os seus pontos fixos $z = x + y\,i$ são as soluções da equação

$$f(z) = z \Leftrightarrow 2\overline{z}+3 = |z|^2+z \Leftrightarrow |z|^2+z-2\overline{z}-3 = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-x-3+3yi = 0,$$

pelo que

$$x^2 + y^2 - x - 3 = 0 \quad \text{e} \quad y = 0.$$

Então $y = 0$ e $x^2 - x - 3 = 0$ e f tem dois pontos fixos reais: $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$ e $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$. Como f é uma isometria inversa, conclui-se que é uma reflexão

com deslize ao longo da recta que une os dois pontos fixos, ou seja a recta hiperbólica de equação $|z - \frac{1}{2}| = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

EXEMPLO 5.4.13. Seja $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ a isometria definida por

$$f(z) = \frac{2\overline{z} + 3}{\overline{z} - 2}.$$

Os seus pontos fixos $z = x + y\,i$ são as soluções da equação

$$f(z) = z \Leftrightarrow 2\overline{z} + 3 = |z|^2 - 2z \Leftrightarrow |z|^2 - 2(z + \overline{z}) - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 7,$$

pelo que f é a reflexão na recta hiperbólica de equação $|z - 2| = \sqrt{7}$.

5.5. Triângulos hiperbólicos

Vimos na Secção 4.1 que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é sempre maior do que π, ao contrário do que acontece em geometria euclidiana, onde a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre π. Vamos ver agora que, em geometria hiperbólica, a soma dos ângulos internos de um **triângulo hiperbólico** (região limitada por três rectas hiperbólicas que se intersectam duas a duas em três pontos distintos de $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$) é sempre menor do que π.

TEOREMA 5.5.1. *Seja Δ um triângulo hiperbólico em $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$ com ângulos internos α, β, γ. Então*

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi.$$

Demonstração: Como a transformação de Möbius $J : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ preserva ângulos podemos considerar apenas triângulos hiperbólicos em $\mathbb{D}$. Além disso, usando uma isometria apropriada pode assumir-se que um dos vértices de Δ é a origem (cf. Exercício 5.6.9). Neste caso, dois dos segmentos de recta hiperbólicos que delimitam o triângulo Δ são segmentos de recta euclidianos com início na origem. Além disso, Δ está contido num triângulo euclidiano $\widehat{\Delta}$ com os mesmos vértices de Δ.

Como o ângulo interno de Δ na origem coincide com o ângulo interno de $\widehat{\Delta}$ nesse ponto e os outros dois ângulos internos de Δ são menores que os ângulos de $\widehat{\Delta}$ correspondentes, conclui-se que a soma dos ângulos internos de Δ é menor que a soma dos ângulos internos de $\widehat{\Delta}$, ou seja que é menor que π. □

5.6. Exercícios

EXERCÍCIO 5.6.1. Determine os pontos fixos das transformações de Möbius $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ seguintes e indique aquelas cuja restrição a $\mathbb{H}$ é uma isometria:

$$a)\ f(z) = \frac{z+2}{3z+4}; \quad b)\ f(z) = \frac{1}{2z}; \quad c)\ f(z) = 2z+3; \quad d)\ f(z) = \frac{3z-1}{z+1}.$$

EXERCÍCIO 5.6.2. Qual a transformação de Möbius $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ que satisfaz $f(0) = i$, $f(1) = 2$ e $f(-1) = 4$?

EXERCÍCIO 5.6.3. Determine a forma geral de uma transformação de Möbius $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ que leva os pontos ∞, z_0 e w_0, respectivamente nos pontos 0, 1 e ∞.

EXERCÍCIO 5.6.4. Considere o conjunto $S = \{0, 1, \infty\} \subset \overline{\mathbb{C}}$. Determine todas as transformações de Möbius $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ que deixam S invariante.

EXERCÍCIO 5.6.5. Sejam $f, g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ duas transformações de Möbius conjugadas i.e tais que $f = h \circ g \circ h^{-1}$, onde h é também uma transformação de Möbius. Mostre que f e g têm o mesmo número de pontos fixos.

EXERCÍCIO 5.6.6. Determine as imagens $f\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$ e $f(C)$ pela aplicação

$$f(z) = \frac{z+1}{z-1},$$

onde $C := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

EXERCÍCIO 5.6.7. Considere a aplicação $f(z) = 1/z$. Qual a imagem das rectas $y = kx$, $y = ax + b$ e das circunferências $x^2 + y^2 = ax$ e $|z| = 1$, onde $x = \mathrm{Re}(z)$ e $y = \mathrm{Im}(z)$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

EXERCÍCIO 5.6.8. Seja $b \in \mathbb{R}^+$. Mostre que $d_{\mathbb{H}}(i, b\,i) = |\log b|$.

EXERCÍCIO 5.6.9. Seja $z_0 \in \mathbb{D}$. Usando o Teorema 5.2.7 indique uma isometria $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tal que $f(z_0) = 0$.

EXERCÍCIO 5.6.10. Seja l uma recta hiperbólica em $\mathbb{D}$ e z_0 um ponto de $\mathbb{D}$ qualquer. Mostre que existe uma única recta hiperbólica que passa em z_0 e é perpendicular a l.

Sugestão: Como as isometrias de $\mathbb{D}$ levam rectas hiperbólicas em rectas hiperbólicas e preservam ângulos, pode assumir-se, usando uma isometria apropriada, que $z_0 = 0$.

EXERCÍCIO 5.6.11. Determine a recta hiperbólica que passa em i e $2+i$.

EXERCÍCIO 5.6.12. Qual o conjunto de pontos equidistantes de i e $2+i$ para a distância hiperbólica em $\mathbb{H}$?

EXERCÍCIO 5.6.13. Definindo a distância dum ponto $z \in \mathbb{H}$ a uma recta hiperbólica $l \subset \mathbb{H}$ como sendo a distância entre z e o ponto de interseção de l com a recta hiperbólica l' que passa em z e é perpendicular a l, mostre que o conjunto de pontos a uma distância hiperbólica fixa r da recta hiperbólica de equação $\operatorname{Re} z = 0$, consiste num par de rectas euclidianas. Qual a relação entre r e o ângulo entre cada uma dessas rectas e a recta $\operatorname{Re} z = 0$?

EXERCÍCIO 5.6.14. Calcule a distância hiperbólica do ponto $1+i$ à recta de equação $\operatorname{Re} z = 0$.

EXERCÍCIO 5.6.15. Seja $z_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Indique uma isometria $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ cuja extensão a $\overline{\mathbb{C}}$ leva z_0 em 0.

EXERCÍCIO 5.6.16. Mostre que duas semi-rectas euclidianas em $\mathbb{H}$ com início num ponto comum do eixo real são paralelas (no sentido em que se mantêm a uma distância hiperbólica constante uma da outra).

Sugestão: Usando uma isometria apropriada pode assumir-se que as duas semirectas têm início em 0 e utilizar o Exercício 5.6.13.

EXERCÍCIO 5.6.17. Dado um triângulo hiperbólico de vértices A, B, C em $\mathbb{D}$ mostre que

$$\sinh b \sinh c \cos \alpha = \cosh b \cosh c - \cosh a,$$

onde α é o ângulo no vértice A (i.e. $\alpha = \measuredangle BAC$) e a, b e c são os comprimentos hiperbólicos do lados opostos a A, B e C respectivamente (i.e. $a = d_{\mathbb{D}}(B, C)$, $b = d_{\mathbb{D}}(A, C)$ e $C = d_{\mathbb{D}}(A, B)$).

Sugestão: Usando uma isometria apropriada pode assumir-se que $A = 0$ e que $B = s > 0$ é um ponto no eixo real positivo. Então $C = re^{\alpha i}$ para algum $r > 0$ e

$$\tanh\left(\frac{c}{2}\right) = s, \quad \tanh\left(\frac{b}{2}\right) = r \quad \text{e} \quad \tanh\left(\frac{a}{2}\right) = \left|\frac{re^{\alpha i} - s}{1 - rse^{\alpha i}}\right|.$$

Note que

$$\cosh a = \frac{1 + \tanh^2\left(\frac{a}{2}\right)}{1 - \tanh^2\left(\frac{a}{2}\right)}.$$

EXERCÍCIO 5.6.18. Seja h_Δ a altura (hiperbólica) em relação à hipotenusa de um triângulo hiperbólico rectângulo isósceles $\Delta \subset \mathbb{D}$. Mostre que o conjunto dos possiveis valores de h_Δ é limitado e determine o seu supremo.

Sugestão: Usando uma isometria apropriada pode assumir-se que o vértice correspondente ao ângulo recto é a origem.

EXERCÍCIO 5.6.19. Mostre que uma circunferência hiperbólica em $\mathbb{D}$ de centro e raio hiperbólicos z_0 e r respectivamente é uma circunferência euclidiana (cf. Lema 5.1.8) de centro w_0 e raio R euclidianos dados por

$$w_0 = \frac{z_0(1-m^2)}{1-m^2|z_0|^2} \quad \text{e} \quad R = \frac{m(1-|z_0|^2)}{1-m^2|z_0|^2},$$

onde $m = \tanh\left(\frac{r}{2}\right)$.

EXERCÍCIO 5.6.20. Diga, justificando se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) uma recta hiperbólica e uma circunferência hiperbólica em $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$ intersectam-se no máximo em dois pontos.
b) duas circunferências hiperbólicas em $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$ intersectam-se no máximo em dois pontos.

EXERCÍCIO 5.6.21. Seja $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad-bc = 1$ uma isometria de $\mathbb{H}$ diferente da identidade e considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Mostre que

- se $|\mathrm{tr}A| < 2$ então f é uma rotação;
- se $|\mathrm{tr}A| = 2$ então f é uma rotação limite;
- se $|\mathrm{tr}A| > 2$ então f é uma translação hiperbólica.

EXERCÍCIO 5.6.22. Seja $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad-bc > 0$ uma isometria de $\mathbb{H}$. Mostre que f é uma meia volta se e só se $a + d = 0$.

EXERCÍCIO 5.6.23. Em $\mathbb{H}$ considere os pontos $P := -3+i$ e $Q := 2+4i$ e as rectas hiperbólicas ℓ e m de equações

$$\ell : \ |z+3| = 3 \qquad \text{e} \qquad m : \ \mathrm{Re}\, z = 4$$

respectivamente.

a) Calcule a distância hiperbólica $d_{\mathbb{H}}(P, Q)$.
b) Determine a equação da recta hiperbólica que passa em P e Q.
c) Qual a imagem de P pela reflexão hiperbólica na recta ℓ?
d) Determine a recta hiperbólica perpendicular a ℓ e a m.
e) Indique uma isometria directa $h : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ tal que $h(\ell) = m$ e classifique essa isometria.
f) Quais as rectas hiperbólicas que passam em Q e são paralelas (e não ultraparalelas) a ℓ.
g) Indique uma recta hiperbólica que passa em Q e é ultraparalela a ℓ.

EXERCÍCIO 5.6.24. Seja r uma recta hiperbólica qualquer de $\mathbb{H}$ e S um ponto que não pertence a r. Mostre que existem exactamente duas rectas paralelas (e não ultraparalelas) a r que passam em S e existem infinitas rectas ultraparalelas a r que passam em S.

EXERCÍCIO 5.6.25. Determine a recta hiperbólica de $\mathbb{H}$ que é perpendicular às rectas hiperbólicas de equações $|z-12|=3$ e $|z-4|=1$.

EXERCÍCIO 5.6.26. Qual o conjunto de pontos de $\mathbb{H}$ que são equidistantes de $z_0=1+i$ e $w_0=4+4i$ para a distância hiperbólica?

Sugestão: Note que a reflexão hiperbólica que leva z_0 em w_0 é uma inversão numa circunferência de centro na origem.

EXERCÍCIO 5.6.27. Seja P um ponto de $\mathbb{D}\setminus\{0\}$. Determine a recta hiperbólica ℓ de $\mathbb{D}$ tal que $R_\ell(P)=0$, onde $R_\ell:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ é a reflexão hiperbólica em ℓ. Mostre que o centro da circunferência de $\overline{\mathbb{C}}$ correspondente é $I(P)$ onde $I:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ é a inversão na circunferência unitária.

EXERCÍCIO 5.6.28. Dê um exemplo de uma isometria de $\mathbb{H}$ que transforme a recta hiperbólica de equação $|z|=1$ na recta hiperbólica de equação $\operatorname{Re} z=2$.

EXERCÍCIO 5.6.29. Considere as isometrias $f_i:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$, $i=1,\ldots,4$, definidas por

$$f_1(z)=2\,z,\quad f_2(z)=-\frac{z+1}{z-1},\quad f_3(z)=z+1\quad\text{e}\quad f_4(z)=-\frac{z}{z-1}.$$

a) Classifique as isometrias f_i.
b) Escreva cada uma destas aplicações como uma composição de reflexões.

EXERCÍCIO 5.6.30. Seja $f:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ a isometria definida por

$$f(z)=\frac{\overline{z}}{2\overline{z}-3}.$$

a) Classifique a isometria f.
b) Dê um exemplo de uma translação hiperbólica ao longo da recta hiperbólica de equação $|z-1|=1$.

EXERCÍCIO 5.6.31. Considere a isometria $f:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ definida por

$$f(z)=\frac{2\overline{z}+5}{\overline{z}-2}.$$

a) Classifique a isometria f, indicando o seu conjunto de pontos fixos.
b) Indique uma recta hiperbólica m tal que $R_m\circ f$ seja uma rotação limite.

EXERCÍCIO 5.6.32. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ considere a aplicação $f_\alpha : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ definida por

$$f_\alpha(z) = \frac{2z+\alpha}{-3z+1}.$$

a) Determine os valores de α para os quais a restrição de f_α a $\mathbb{H}$ é uma translação hiperbólica.
b) Indique uma isometria $h : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ tal que $g := h \circ f_0 \circ h^{-1}$ é uma translação hiperbólica ao longo da recta de equação $\operatorname{Re} z = 0$.
c) Quais as circunferências de $\overline{\mathbb{C}}$ que são invariantes por uma translação hiperbólica ao longo da recta de equação $\operatorname{Re} z = 0$?
d) Quais as circunferências de $\overline{\mathbb{C}}$ que são invariantes por f_0.
e) Mostre que $d_{\mathbb{H}}(z, f_0(z))$ é constante ao longo da recta hiperbólica de equação $|z + \frac{1}{6}| = \frac{1}{6}$.

EXERCÍCIO 5.6.33. Considere as isometrias $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ definidas por

$$f_\alpha(z) = \frac{2z+\alpha^2}{z+2},$$

com $\alpha \in]-2, 2[$.

a) Determine o(s) valor(es) de α para os quais f_α é uma rotação limite.
b) Classifique as isometrias $R_{m_\alpha} \circ f_\alpha \circ R_{m_\alpha}$ onde m_α é a recta hiperbólica de equação $\operatorname{Re} z = \alpha$.

EXERCÍCIO 5.6.34. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, considere a aplicação $f_\alpha : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ definida por

$$f_\alpha(z) = \frac{3\overline{z}+\alpha}{2\overline{z}+(\alpha-1)}.$$

a) Determine os valores de α para os quais a restrição de f_α a $\mathbb{H}$ é uma reflexão com deslize.
b) Classifique as isometrias de $\mathbb{H}$,

$$f_0, \quad f_0^2, \quad h \circ f_0^2 \circ h^{-1} \quad \text{e} \quad f_{-2},$$

onde $h : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ é a reflexão na recta hiperbólica de equação $\operatorname{Re} z = 3$.
c) Indique dois pontos $P, Q \in \mathbb{H}$ para os quais a recta hiperbólica de equação

$$\left| z - \frac{3}{2} \right|^2 = \frac{5}{4}$$

é o conjunto de pontos de $\mathbb{H}$ equidistantes de P e Q.

EXERCÍCIO 5.6.35. Em $\mathbb{H}$ considere as rectas hiperbólicas ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 e ℓ_4 de equações

$$\ell_1 : \ \operatorname{Re} z = 0, \quad \ell_2 : \ |z| = 4, \quad \ell_3 : \ |z| = 2 \quad \text{e} \quad \ell_4 : \ |z+1| = 3$$

e a isometria $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ definida por

$$f(z) = \frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1}.$$

a) Classifique as isometrias

$$f, \quad R_{\ell_2} \circ R_{\ell_1}, \quad R_{\ell_3} \circ R_{\ell_2}, \quad R_{\ell_4} \circ R_{\ell_3}, \quad R_{\ell_4} \circ R_{\ell_1} \quad \text{e} \quad R_{\ell_3} \circ R_{\ell_2} \circ R_{\ell_1}.$$

b) Qual a imagem de ℓ_4 pela reflexão na recta hiperbólica ℓ_2?

c) Determine, se existir, uma isometria $h : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ tal que $h(\ell_2) = \ell_3$ e $h(\ell_4) = \ell_4$.

d) Quais as isometrias directas de $\mathbb{H}$ que comutam com f?

EXERCÍCIO 5.6.36. Considere as rectas hiperbólicas de ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 e $\ell_4 \subset \mathbb{D}$ definidas por

$$\ell_1 : \ \mathrm{Im}\, z = -\mathrm{Re}\, z, \quad \ell_2 : \ |z+\sqrt{2}i| = 1, \quad \ell_3 : \ |z-\sqrt{5}i/2| = 1/2, \quad \ell_4 : \ \mathrm{Re}\, z = 0.$$

Classifique as isometrias

$$R_{l_1} \circ R_{l_2}, \quad R_{l_2} \circ R_{l_3}, \quad R_{l_4} \circ R_{l_1}, \quad R_{l_4} \circ R_{l_2} \quad \text{e} \quad R_{l_2} \circ R_{l_3} \circ R_{l_4}.$$

EXERCÍCIO 5.6.37. Sejam ℓ_1 e ℓ_2 as rectas de $\mathbb{H}$ definidas por $\mathrm{Re}\, z = 0$ e $\mathrm{Re}\, z = 2$ respectivamente. Determine e classifique as isometrias $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ tais que $f(\ell_1) = \ell_2$.

EXERCÍCIO 5.6.38. Seja $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ uma isometria tal que $f(i) = 2i$ e $f(2+i)$ pertence à recta $\mathrm{Re}\, z = 2$.

a) Diga se f pode ser uma reflexão hiperbólica.

b) Assuma que $f(z) = \dfrac{14z + 2\sqrt{7}}{-\sqrt{7}\, z + 7}$ e classifique essa isometria. Qual a imagem $f(m)$ da recta hiperbólica m de equação $\mathrm{Re}\, z = \sqrt{7}$?

EXERCÍCIO 5.6.39. Seja $g : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ a reflexão na recta hiperbólica de equação $|z-1| = 1$.

a) Sendo $\mathcal{C} := \{z \in \mathbb{H} : |z-(2+i)| = 1\}$ determine $g(\mathcal{C})$.

b) Indique a reflexão $h : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ tal que $g \circ h \circ g$ é a reflexão na recta de equação $\mathrm{Re}\ z = 2$.

EXERCÍCIO 5.6.40. Considere a isometria $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ definida por

$$f(z) = \frac{(1+i)z + 1}{z + 1 - i}.$$

Classifique as isometrias f e $h \circ f \circ h$ onde h é a reflexão na recta de equação $\mathrm{Im}\, z = \mathrm{Re}\, z$.

EXERCÍCIO 5.6.41. Considere a reflexão hiperbólica $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ que verifica $g(1/2) = 0$.

a) Indique a expressão de g.
b) Determine a equação da recta hiperbólica m que passa em $z_0 = \frac{1}{2}$ e é perpendicular ao eixo real.
c) Qual o conjunto de pontos fixos em $\overline{\mathbb{D}}$ de $g \circ R_m$, onde R_m é a reflexão em m?

EXERCÍCIO 5.6.42. Seja $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ uma isometria tal que $f(i) = 2i$ e $f(1+i)$ pertence à recta euclidiana de equação $\operatorname{Im} z = 1$.

a) Quais os possíveis valores de $f(1+i)$?
b) Determine e classifique as isometrias f que satisfazem estas condições.

EXERCÍCIO 5.6.43. Seja $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ uma reflexão com deslize hiperbólica que deixa invariante a recta hiperbólica de equação $|z| = 1$, e $g : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ a reflexão na recta m de equação $\operatorname{Re} z = 1$.

a) Quais as possíveis expressões para f?
b) Sabendo que $f(0) = 2$ classifique a isometria $f \circ g$.

EXERCÍCIO 5.6.44. Seja C a curva de $\mathbb{H}$ definida por $\operatorname{Im} z = 2 \operatorname{Re} z$.

a) Determine as isometrias $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ que preservam C e classifique-as.
b) Determine a imagem $g(C)$ onde $g : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ é a isometria definida por $g(z) = \frac{z+1}{-z+1}$.

EXERCÍCIO 5.6.45. Mostre que duas isometrias directas de $\mathbb{H}$ comutam se e só se têm o mesmo conjunto de pontos fixos em $\overline{\mathbb{C}}$.

EXERCÍCIO 5.6.46. Seja $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ uma rotação limite. Mostre que se $g : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ é uma isometria que comuta com f, então g é uma isometria directa.

EXERCÍCIO 5.6.47. Mostre que duas reflexões em rectas hiperbólicas l e m de $\mathbb{H}$ comutam se e só se l e m são perpendiculares.

EXERCÍCIO 5.6.48. Indique, justificando, uma condição necessária e suficiente para que duas reflexões com deslize em $\mathbb{H}$ comutem.

EXERCÍCIO 5.6.49. Diga, justificando, se as seguintes afirmações sobre isometrias f, g de $\mathbb{H}$ são verdadeiras ou falsas:

a) Se $f(2+i) = -2+i$ e ℓ é a recta hiperbólica de equação $\operatorname{Re} z = 0$, então $f(\ell) = \ell$.

b) Se $f(\ell) = g(\ell) = \ell$ para alguma recta hiperbólica $\ell \subset \mathbb{H}$, então f e g comutam.

EXERCÍCIO 5.6.50. Mostre que se ℓ e m são duas rectas hiperbólicas paralelas assimptóticas em $z_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (i.e. ℓ e m não são ultraparalelas) e ℓ' é uma terceira recta hiperbólica assimptótica a ℓ e a m em z_0, então existe uma recta hiperbólica m' tal que

$$R_m \circ R_\ell = R_{m'} \circ R_{\ell'}.$$

EXERCÍCIO 5.6.51. Mostre que o grupo de isometrias de $\mathbb{H}$ é gerado pelas reflexões em rectas hiperbólicas definidas por equações da forma

$$|z - k| = r,$$

onde $k \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}^+$. Qual o resultado equivalente em $\mathbb{D}$?

EXERCÍCIO 5.6.52. Mostre que a imagem de um horociclo por uma isometria hiperbólica é ainda um horociclo.

EXERCÍCIO 5.6.53. Seja $g : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ uma isometria que deixa invariante o horociclo m de equação $\operatorname{Im} z = 1$.

a) Indique as possíveis expressões de g e classifique as isometrias correspondentes.

b) Quais as isometrias de $\mathbb{H}$ que deixam invariante o horociclo de equação $|z - i| = 1$?

EXERCÍCIO 5.6.54. Mostre que, dados dois pontos distintos $P, Q \in \mathbb{H}$, existem exactamente dois horociclos que passam em P e Q.

Sugestão: Usando uma isometria apropriada pode assumir que $\operatorname{Im} P = \operatorname{Im} Q$ e $\operatorname{Re} P = -\operatorname{Re} Q$.

EXERCÍCIO 5.6.55. Dado um horociclo $\mathcal{C}$ de $\mathbb{H}$ e um ponto $P \in \mathcal{C}$ qualquer, indique quantos horociclos de $\mathbb{H}$ intersectam $\mathcal{C}$ apenas em P. Descreva geometricamente como se determina(m).

EXERCÍCIO 5.6.56. Quais os horociclos de $\mathbb{D}$ que passam na origem?

EXERCÍCIO 5.6.57. Seja $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ uma isometria directa com dois pontos fixos em $\overline{\mathbb{R}}$ e seja $x_0 \in \mathbb{R}$ um destes pontos. Mostre que se $\mathcal{A}$ é o interior da região limitada por um horociclo $\mathcal{C}$ que passa em x_0 e $z \in \mathcal{C} \cap \mathbb{H}$, então ou $f(z) \in \mathcal{A}$ ou $f^{-1}(z) \in \mathcal{A}$.

EXERCÍCIO 5.6.58.

Mostre que no plano hiperbólico não existem rectângulos hiperbólicos (i.e. quadriláteros hiperbólicos com vértices em $\mathbb{H}$ com todos os ângulos internos iguais a $\pi/2$).

EXERCÍCIO 5.6.59. Seja $\ell \subset \mathbb{H}$ uma recta hiperbólica. Dados dois pontos $z_0, w_0 \in \mathbb{H} \setminus \ell$ determine o mínimo do conjunto

$$A = \{d_{\mathbb{H}}(z_0, z) + d_{\mathbb{H}}(w_0, z) : \ z \in \ell\} \subset \mathbb{R}$$

e indique em que pontos é obtido.

EXERCÍCIO 5.6.60. Considere o subgrupo de isometrias hiperbólicas

$$\Gamma := \left\{ g : \mathbb{H} \to \mathbb{H} : \ g(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{com} \quad a,b,c,d \in \mathbb{Z}, \ \ ad - bc = 1 \right\}$$

e o conjunto $R := \{z \in \mathbb{H} : \ -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{1}{2}, \ \ |z| \geq 1\}$. Mostre que, para cada $z \in \mathbb{H}$, existe um $g \in \Gamma$ tal que $g(z) \in R$.

Sugestão: Note que, dado um $z \in \mathbb{H}$, o número de pares $(c,d) \in \mathbb{Z}^2$ tais que $|cz + d| \leq 1$ é finito, pelo que o conjunto $A = \{\mathrm{Im}\, g(z) : \ g \in \Gamma\}$ tem um máximo. Se $\mathrm{Im}\, z \geq 1$ então existe uma rotação limite $f \in \Gamma$ em torno de ∞ tal que $f(z) \in R$. Se $\mathrm{Im}\, z < 1$ então, se considerarmos g tal que $\mathrm{Im}\, g(z)$ é o máximo de A, temos que $\mathrm{Im}\, g(z) > 1$ (caso contrário $\mathrm{Im}\, (h \circ g)(z) > \mathrm{Im}\, g(z)$, onde $h(z) = -1/z \in \Gamma$).

APÊNDICE A

Álgebra

A.1. Grupos

Uma operação (binária) num conjunto A é uma aplicação

$$f : A \times A \to A.$$

Uma operação em A faz então corresponder a cada par de elementos (a_1, a_2) de A um elemento $f(a_1, a_2)$ de A. Vamos indicar $f(a_1, a_2)$ por $a_1 * a_2$ e dizer que $*$ é uma operação em A.

Uma operação $*$ em A diz-se **associativa** se

$$(a_1 * a_2) * a_3 = a_1 * (a_2 * a_3), \quad \forall a_1, a_2, a_3 \in A$$

e **comutativa** se

$$a_1 * a_2 = a_2 * a_1, \quad \forall a_1, a_2 \in A.$$

Um **grupo** G é um conjunto em que está definida uma operação **associativa** satisfazendo as seguintes propriedades:

1. existe um único elemento e de G (chamado a **identidade** de G), tal que
$$g * e = e * g = g, \quad \forall g \in G.$$
2. para cada $g \in G$ existe um único elemento g^{-1} (o **inverso** de g), tal que
$$g * g^{-1} = g^{-1} * g = e, \quad \forall g \in G.$$

Um grupo G diz-se **abeliano** se a operação for comutativa.

Normalmente, se um grupo G é comutativo, indica-se a operação do grupo por $(+)$ e a identidade e por 0. Em geral, para um grupo não necessariamente comutativo, costuma indicar-se a operação por $(\cdot)$ e a identidade e por 1 ou 1_G ou ainda id_G.

Um subconjunto H de G diz-se um **subgrupo** de G se a operação $*$ de G se restringe a H e define uma estrutura de grupo em H. Por outras palavras, $H \subseteq G$ é um subgrupo de G se e só se

1. $h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 * h_2 \in H$,

2. $h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$
3. $e \in H$.

É fácil verificar que a intersecção de dois subgrupos de um grupo G é sempre um subgrupo de G e que, em geral, a intersecção de uma família qualquer de subgrupos de G é um subgrupo de G.

Dado um grupo G e um subconjunto $\Gamma \subset G$ chama-se **subgrupo gerado por** Γ ao mais pequeno subgrupo de G que contém Γ, e indica-se por $< \Gamma >$. Se $< \Gamma >= G$ diz-se que Γ gera G. Se Γ é um conjunto finito e $< \Gamma >= G$, diz-se que G é **finitamente gerado**.

Se $g \in G$, o subgrupo $< g >$ consiste em todas as potências inteiras de g, ou seja

$$< g >= \{e = g^0, g^{+1}, g^{-1}, g^2, g^{-2}, \ldots\},$$

(onde $e = g^0$). Chama-se a $< g >$ o grupo cíclico gerado por g. Se todas as potências inteiras de g forem distintas então $< g >$ tem um número infinito de elementos e diz-se que é um grupo **cíclico infinito**. Em geral, um grupo G diz-se **cíclico** se for gerado por um só elemento.

Um grupo G diz-se um **grupo finito** se tiver um número finito de elementos.

Proposição A.1.1. *Seja G um grupo cíclico gerado pelo elemento $g \neq id_G$. O grupo G é finito se e só se existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \neq 0$ e $g^m = id_G$.*

Demonstração: Como G é um grupo cíclico gerado pelo elemento g,

$$G = \{g^n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Suponhamos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $g^m = id_G$. Então, dado $k \in \mathbb{Z}$, podemos escrever $k = m\,q + r$ onde $q, r \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < m$ e assim,

$$g^k = g^{mq} \cdot g^r.$$

Como $g^{mq} = id_G$, concluímos que $g^k = g^r$, pelo que G contém, no máximo, os elementos distintos $g^0, g, \ldots, g^{m-1}$ e portanto G é um conjunto finito. Logo, se existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $g^m = id_G$, temos que G é finito.

Suponhamos agora que G é finito. Então existem $n, k \in \mathbb{N}$ com $n \neq k$ tais que $g^n = g^k$. Podemos supor que $n > k$. Como $g^n = g^k$ temos também

$$g^n g^{-k} = g^k g^{-k} = id_G$$

e então $g^{n-k} = id_G$. Conclui-se assim que existe $m = n - k \neq 0$ tal que $g^m = id_G$. □

A.2. Aneis e Corpos

Um **anel** R é um conjunto onde estão definidas duas operações **associativas**, normalmente designadas por adição $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$ que satisfazem as seguintes propriedades:

1. $(R, +)$ é um grupo abeliano (a sua **identidade** é normalmente designada por 0).
2. (**Propriedades distributivas**) $\forall a, b, c \in R$,

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c;$$
$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a.$$

Um elemento $1 \in R$ diz-se a **identidade para a multiplicação** se

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \quad \forall a \in R.$$

Se um anel tiver identidade para a multiplicação diz-se que um elemento $a \in R$ tem **inverso** se existe $a^{-1} \in R$ tal que

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

Um anel diz-se **comutativo** se a multiplicação for comutativa, i.e. se $a \cdot b = b \cdot a$ para todos os elementos $a, b \in R$.

Um **corpo** F é um anel comutativo com identidade em que cada elemento diferente de zero tem inverso, i.e. para todo o $a \in F \setminus \{0\}$ existe $a^{-1} \in F$ tal que

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

Nota A.2.1. Alguns autores não incluem a condição de que a multiplicação é comutativa na definição de corpo, chamando corpo ao que usualmente se designa por **anel de divisão**.

APÊNDICE B

Noções associadas a um produto interno

B.1. Norma de um vector

Seja V um espaço vectorial real de dimensão finita munido de um produto interno $(u, v) \to \langle u, v\rangle$. Dado um vector $v \in V$ chama-se **norma** ou **comprimento** de v ao número real

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

EXEMPLO B.1.1. Se considerarmos em $\mathbb{R}^n$ o produto interno usual, a norma de $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$ é

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

A função

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$

definida por

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

para todo o vector $v \in V$ satisfaz as seguintes propriedades.

PROPOSIÇÃO B.1.2. *Para todos os vectores $u, v, w \in V$ e todo o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ temos*

1. $\|v\| \geq 0$.
2. $\|v\| = 0$ *se e só se* $v = 0$.
3. $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$.
4. $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle$.
5. $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v\rangle$.
6. $\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 4\langle u, v\rangle$.
7. ***(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)***

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$$

e a igualdade é verificada se e só se os vectores u e v são linearmente dependentes.

*8. (***Desigualdade triangular***)*

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

e a igualdade verifica-se se e só se $u = 0$ *ou* $v = \lambda u$ *para um* $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$.

9. $\big|\|u\| - \|v\|\big| \leq \|u+v\|$.

B.2. Ângulo entre dois vectores

O **ângulo** entre dois vectores não nulos u e v de um espaço vectorial real V munido de um produto interno é definido como sendo o único número real $\measuredangle(u,v) = \alpha \in [0,\pi]$ tal que

$$\cos\alpha = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}.$$

Nota B.2.1. Este conceito está bem definido pois, por um lado, a desigualdade de Cauchy-Schwartz garante que

$$\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \in [-1,1]$$

e, por outro lado, a aplicação $\cos : [0,\pi] \to \mathbf{R}$ estabelece uma bijecção entre $[0,\pi]$ e $[-1,1]$.

O ângulo entre dois vectores satisfaz as seguintes propriedades.

Proposição B.2.2. *Sejam* u *e* v *dois vectores não nulos dum espaço vectorial real* V *munido de um produto interno* $\langle\cdot,\cdot\rangle$. *Então,*

(i) $\measuredangle(u,v) = \measuredangle(v,u)$;
(ii) $\measuredangle(u,-v) = \measuredangle(-u,v) = \pi - \measuredangle(u,v)$;
(iii) $\measuredangle(u,v) = \frac{\pi}{2}$ *se e só se* $\langle u,v\rangle = 0$;
(iv) $\measuredangle(u,v) = 0$ *se e só se existe* $\lambda > 0$ *tal que* $u = \lambda v$;
(v) $\measuredangle(u,v) = \pi$ *se e só se existe* $\lambda < 0$ *tal que* $u = \lambda v$.

B.3. Ângulo orientado de dois vectores de $\mathbb{R}^2$

Consideremos em $\mathbb{R}^2$ o produto interno usual.

Em $\mathbb{R}^2$, qualquer vector $u = (u_1,u_2)$ pode ser escrito de forma única como

$$u = \|u\|(\cos\theta,\sin\theta),$$

com $\theta \in [0,2\pi[$. O **ângulo orientado** entre dois vectores, $\measuredangle_{or}(u,v)$, em que

$$u = \|u\|(\cos\theta_1,\sin\theta_1) \quad \text{e} \quad v = \|v\|(\cos\theta_2,\sin\theta_2),$$

define-se como sendo o único número real $\alpha \in [0, 2\pi[$ congruente com $\theta_2 - \theta_1$, mod 2π.

De forma equivalente, podemos definir o ângulo orientado de dois vectores não nulos u e v da seguinte forma.

Se $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ forem linearmente independentes,

$$\measuredangle_{or}(u,v) = \begin{cases} \measuredangle(u,v), & se \quad u_1v_2 - u_2v_1 > 0 \\ 2\pi - \measuredangle(u,v), & se \quad u_1v_2 - u_2v_1 < 0 \end{cases} . \tag{B.3.1}$$

Se $u = \lambda v$ com $\lambda > 0$ então

$$\measuredangle_{or}(u,v) = 0$$

e se $u = \lambda v$ com $\lambda < 0$, temos

$$\measuredangle_{or}(u,v) = \pi.$$

O ângulo orientado entre dois vectores de $\mathbb{R}^2$ satisfaz as seguintes propriedades (em que todas as igualdades são mod 2π):

PROPOSIÇÃO B.3.1. *Sejam u e v dois vectores não nulos de $\mathbb{R}^2$. Então*

(i) $\measuredangle_{or}(u,v) = 2\pi - \measuredangle_{or}(v,u)$;
(ii) $\measuredangle_{or}(u,u) = 0$;
(iii) $\measuredangle_{or}(u,v) + \measuredangle_{or}(v,w) = \measuredangle_{or}(u,w)$;
(iv) $\measuredangle_{or}(u+w, v+w) = \measuredangle_{or}(u,v)$;
(v) $\measuredangle_{or}(-u,v) = \measuredangle_{or}(u,-v) = \pi + \angle_{or}(u,v)$;
(vi) $\measuredangle_{or}(-u,-v) = \measuredangle_{or}(u,v)$.

B.4. Ângulo orientado entre duas rectas em $\mathbb{R}^2$

Dadas duas rectas l e m de $\mathbb{R}^2$, define-se o **ângulo orientado** $\measuredangle_{or}(l,m)$ entre l e m, como sendo o menor dos ângulos orientados $\measuredangle_{or}(u,v)$, onde u é um vector director de l e v é um vector director de m. O ângulo orientado de duas rectas varia entre 0 e π.

Pela definição, e tendo em conta que dados dois vectores u e v não nulos se tem

$$\measuredangle_{or}(-u,v) \equiv \measuredangle_{or}(u,-v) \equiv \pi + \measuredangle_{or}(u,v) \pmod{2\pi} \quad \text{e}$$
$$\measuredangle_{or}(-u,-v) \equiv \measuredangle_{or}(u,v) \pmod{2\pi},$$

para calcular o ângulo orientado entre duas rectas l e m basta tomar um vector director u' de l e um vector director v' de m e, se $\measuredangle_{or}(u',v') < \pi$, então $\measuredangle_{or}(l,m) = \angle_{or}(u',v')$. Se $\measuredangle_{or}(u',v') \geq \pi$ então $\measuredangle_{or}(l,m) = \measuredangle_{or}(u',v') - \pi$.

O ângulo orientado entre duas rectas de $\mathbb{R}^2$ satisfaz as seguintes propriedades.

PROPOSIÇÃO B.4.1. *Sejam l e m duas rectas de $\mathbb{R}^2$. Então*

(i) $\measuredangle_{or}(l,m) = \pi - \measuredangle_{or}(m,l)$;

(ii) se u e v são vectores directores de l e m respectivamente, então

$$2\measuredangle_{or}(l,m) \equiv 2\measuredangle_{or}(u,v), \pmod{2\pi};$$

(iii) se l, m e n são rectas de $\mathbb{R}^2$, então

$$2\measuredangle_{or}(l,n) = 2\left(\measuredangle_{or}(l,m) + \measuredangle_{or}(m,n)\right), \pmod{2\pi}.$$

EXEMPLO B.4.2. Consideremos as rectas

$$l = (3,20) + \mathcal{L}\{(1,1)\} \quad \text{e} \quad m = (\pi,2) + \mathcal{L}\{(\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1)\}.$$

Temos

$$\cos\left(\measuredangle\left((1,1),(\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1)\right)\right) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

pelo que

$$\measuredangle\left((1,1),(\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1)\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Como $1\cdot(\sqrt{3}-1) - 1\cdot(\sqrt{3}+1) < 0$ (ver (B.3.1)), temos

$$\measuredangle_{or}\left((1,1),(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1)\right) = 2\pi - \frac{\pi}{6} > \pi.$$

Assim, $\measuredangle_{or}(l,m) = \pi - \frac{\pi}{6}$.

APÊNDICE C

Aplicações ortogonais

C.1. Aplicações ortogonais

Seja V um espaço vectorial real de dimensão finita munido de um produto interno $(u, v) \mapsto \langle u, v\rangle$.

DEFINIÇÃO C.1.1. *Uma aplicação $f : V \to V$ diz-se uma* **aplicação ortogonal** *(relativamente ao produto interno em V) se, para quaisquer dois vectores $u, v \in V$, se tem*

$$\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle.$$

NOTA C.1.2. É fácil ver, a partir da definição de norma de um vector, que uma aplicação ortogonal f preserva as normas dos vectores, i.e.

$$\|f(v)\| = \|v\|,$$

para todo o vector $v \in E$. Com efeito,

$$\|f(v)\|^2 = \langle f(v), f(v)\rangle = \langle v, v\rangle = \|v\|^2.$$

PROPOSIÇÃO C.1.3. *Toda a aplicação ortogonal é uma aplicação linear bijectiva (ou seja um isomorfismo de espaços vectoriais).*

Demonstração: Seja $f : V \to V$ uma aplicação ortogonal. Vejamos primeiro que f é linear. Sejam $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos

$$\begin{aligned}\|f(\alpha u + v) - \alpha f(u) - f(v)\|^2 &= \|f(\alpha u + v)\|^2 - 2\alpha\langle f(\alpha u + v), f(u)\rangle \\ &\quad - 2\langle f(\alpha u + v), f(v)\rangle + \alpha^2\|f(u)\|^2 + 2\alpha\langle f(u), f(v)\rangle + \|f(v)\|^2 \\ &= \|\alpha u + v\|^2 - 2\alpha\langle \alpha u + v, u\rangle - 2\langle \alpha u + v, v\rangle + \alpha^2\|u\|^2 + 2\alpha\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \\ &= \|\alpha u + v\|^2 - 2\langle \alpha u + v, \alpha u + v\rangle + \alpha^2\|u\|^2 + 2\alpha\langle u, v\rangle + \|v\|^2 = 0.\end{aligned}$$

Conclui-se assim que $\|f(\alpha u + v) - \alpha f(u) - f(v)\|^2 = 0$ e então

$$f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v),$$

pelo que f é uma aplicação linear.

Para ver que f é bijectiva basta ver que $\ker f = \{0\}$. Seja $u \in V$ tal que $f(u) = 0$. Então, como

$$\|u\|^2 = \|f(u)\|^2 = 0,$$

temos que $u = 0$. □

C.2. Propriedades das aplicações ortogonais de espaços de dimensão finita

PROPOSIÇÃO C.2.1. *A aplicação inversa de uma aplicação ortogonal é ainda ortogonal.*

PROPOSIÇÃO C.2.2. *A composição de duas aplicações ortogonais de V em V é uma aplicação ortogonal.*

PROPOSIÇÃO C.2.3. *Se λ é um valor próprio de uma aplicação ortogonal, então $|\lambda| = 1$.*

PROPOSIÇÃO C.2.4. *Dada uma aplicação* **linear** *$f : V \to V$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *$f : V \to V$ é uma aplicação ortogonal.*

(ii) *$\|f(u)\| = \|u\|$ para todo o vector $u \in V$.*

(iii) *Existe uma base ortonormada $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V tal que*

$$\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$$

é uma base ortonormada de V.

(iv) *Para toda a base ortonormada $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V, os vectors*

$$f(e_1), \ldots, f(e_n)$$

formam uma base ortonormada de V.

(v) *A matriz A que representa f em relação a uma base ortonormada é uma matriz ortogonal, ou seja verifica*

$$A^T A = Id.$$

PROPOSIÇÃO C.2.5. *Se $f : V \to V$ é uma aplicação ortogonal, então para quaisquer vectores $u, v \in V$ tem-se $\measuredangle(u, v) = \measuredangle(f(u), f(v))$.*

PROPOSIÇÃO C.2.6. *Se $f : V \to V$ é uma aplicação ortogonal e u e v são vectores próprios associados a valores próprios distintos, então*

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

PROPOSIÇÃO C.2.7. *Se $f : V \to V$ é uma aplicação ortogonal e W é um subespaço vectorial de V, então $f(W^\perp) = (f(W))^\perp$.*

C.3. Aplicações ortogonais de $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual

Considere em $\mathbb{R}^2$ o produto interno usual, que é o produto interno em relação ao qual a base canónica é ortonormada. Seja f uma aplicação ortogonal de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, e A a matriz de f em relação à base canónica. Então, como a base canónica é ortornormada em relação ao produto interno usual, temos, pela Proposição C.2.4 - v), que a matriz A é ortogonal. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Como A é ortogonal, temos $A^T A = Id$, pelo que

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0. \end{cases}$$

Temos também $AA^T = Id$, pelo que

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0. \end{cases}$$

Como $a^2 + c^2 = 1$, existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tal que $a = \cos\theta$ e $c = \sin\theta$. Usando as equações acima facilmente se conclui que ou $b = -\sin\theta$ e $d = \cos\theta$, ou $b = \sin\theta$ e $d = -\cos\theta$.

No primeiro caso temos $\det A = 1$ e no segundo temos $\det A = -1$. Vamos discutir separadamente os dois casos.

Caso I ($\det A = 1$):

Seja

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

Se $|\cos\theta| = 1$ então ou

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad f = Id,$$

ou

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad f = -Id.$$

Se $|\cos\theta| \neq 1$ então o polinómio característico de A,

$$x^2 - 2\cos\theta x + 1,$$

não tem raízes reais pelo que f não tem nenhum valor próprio real. Em particular, para todo o vector não nulo $v \in V$, os vectores $f(v)$ e v são linearmente independentes.

Caso II ($\det A = -1$):

Se

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad \theta \in [0, 2\pi[,$$

então o polinómio característico de A é

$$x^2 - 1,$$

e tem as raízes 1 e -1, pelo que existe uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ formada por vectores próprios de f. O subespaço próprio associado ao valor próprio 1 é o subespaço gerado pelo vector

$$\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right).$$

O subespaço próprio associado ao valor próprio -1 é o subespaço gerado pelo vector

$$\left(-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right).$$

Seja $B = (v, u)$ uma base de $\mathbb{R}^2$ onde v é um vector próprio associado ao valor próprio 1 e u é um vector próprio associado ao valor próprio -1. Então $D := M(f; B)$ é tal que

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

pelo que, para qualquer vector $w = \alpha v + \beta u \in \mathbb{R}^2$ se tem $f(w) = \alpha v - \beta u$. Assim, f, considerada como uma aplicação entre espaços afins, é exactamente a reflexão na recta que passa por $O = (0, 0)$ e tem a direcção de subespaço próprio associado ao valor próprio 1, ou seja o subespaço vectorial

$$\mathcal{L}\left\{\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\right\}.$$

NOTA C.3.1. No Caso I acima, i.e. quando $\det A = 1$, diz-se que f é uma **rotação de centro em** $(0, 0)$ **e ângulo** θ e denota-se por $\overrightarrow{\phi}_\theta$. Este nome vem do facto de que, para todo o $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \pi$, o ângulo orientado entre v e $f(v)$ é θ.

No Caso II, i.e. quando $\det A = -1$, diz-se que f é uma **reflexão**. De facto, f considerada como aplicação entre espaços afins é exactamente a

reflexão na recta

$$s = (0,0) + \mathcal{L}\left\{\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\right\}.$$

C.4. Forma normal de uma matriz ortogonal

É possível mostrar que se $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação ortogonal, então existe uma base ortonormada $B = (e_1, ..., e_n)$ em relação à qual ϕ é representada pela matriz

$$M(\phi; B) = \begin{bmatrix} Id_p & & & & & & \\ & -Id_s & & & & & \\ & & B_1 & & & & \\ & & & B_2 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & B_t & \end{bmatrix}$$

onde Id_k é a matriz identidade $k \times k$, e $B_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix}$ com $\theta_i \in [0, 2\pi[$ e $\theta \neq \pi$.

Os números p, s e t podem ser 0 e p é exactamente a multiplicidade geométrica de 1 como valor próprio de ϕ enquanto que s é exactamente a multiplicidade geométrica de -1 como valor próprio de ϕ.

A demonstração é feita por indução em n. Se $n = 1$ as únicas aplicações ortogonais são $id_{\mathbb{R}}$ e $-id_{\mathbb{R}}$ pelo que o resultado é trivial.

Quando $n = 2$ o resultado foi provado na secção anterior.

Se ϕ é uma aplicação ortogonal de $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 3$ basta encontrar um subespaço W não trivial que seja preservado por ϕ. Com efeito, o seu complemento ortogonal $W^\perp$ é também preservado por ϕ e podemos aplicar a hipótese de indução a W e a $W^\perp$.

Se ϕ tem um valor próprio real podemos considerar o subespaço W de dimensão 1 gerado por um vector próprio não nulo. Caso contário, se λ é um valor próprio complexo, então o seu conjugado $\overline{\lambda}$ é também um valor próprio de ϕ. Se w é um vector próprio complexo de ϕ (onde consideramos $\mathbb{R}^n$ como um subconjunto de $\mathbb{C}^n$) associado ao valor próprio λ, então o seu conjugado $\overline{w}$ é um vector próprio associado ao valor próprio $\overline{\lambda}$. Além disso, o plano complexo gerado por w e $\overline{w}$ é preservado por ϕ. Os vectores reais

$$\operatorname{Re} w = \frac{w + \overline{w}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} w = \frac{w - \overline{w}}{2i}$$

geram um plano W de $\mathbb{R}^n$ preservado por ϕ.

APÊNDICE D

Espaço dual

DEFINIÇÃO D.0.1. *Dado um espaço vectorial V sobre um corpo K chama-se* ***forma linear*** *a uma aplicação linear $f : V \to K$.*

DEFINIÇÃO D.0.2. *Seja V um espaço vectorial sobre K. O* ***espaço dual*** *de V (designado por V^*) é o conjunto de todas as formas lineares em V.*

O conjunto V^* tem naturalmente uma estrutura de espaço vectorial em que a soma de duas formas lineares $f, g \in V^*$ é a forma linear $f + g$ definida por

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v), \quad \forall v \in V$$

e a multiplicação de uma forma $f \in V^*$ por um escalar $\lambda \in K$ é a forma linear λf dada por

$$(\lambda f)(v) = \lambda f(v), \quad \forall v \in V.$$

PROPOSIÇÃO D.0.3. *Se $(e_1, \ldots, e_n)$ é uma base do espaço vectorial V então o conjunto $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ em que $e_i^* \in V^*$ é a forma linear definida por*

$$e_i^*(e_j) = 0, \quad i \neq j$$
$$e_i^*(e_i) = 1,$$

é uma base de V^*.

Demonstração: Dada $f \in V^*$, seja $a_i \in K$ tal que $f(e_i) = a_i$. Como uma aplicação linear fica univocamente determinada pelas imagens dos vectores de uma base e $\sum a_j\, e_j^*(e_i) = a_i$, conclui-se que $f = \sum a_j\, e_j^*$, pelo que as formas lineares $e_1^*, \ldots, e_n^*$ geram o espaço V^*. Então para ver que $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ é uma base de V^*, basta verificar a independência linear destes vectores.

Seja $b_1\, e_1^* + \cdots + b_n\, e_n^*$ uma combinação linear dos vectores $e_1^*, \ldots, e_n^*$. Como

$$(b_1\, e_1^* + \cdots + b_n\, e_n^*)(e_i) = b_i, \quad \forall i = 1, ..., n,$$

temos que se $b_1\, e_1^* + \cdots + b_n\, e_n^* = 0$, então $b_1 = \cdots = b_n = 0$. □

DEFINIÇÃO D.0.4. *À base $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ como na Proposição D.0.3 dá-se o nome de* ***base dual*** *da base $(e_1, \ldots, e_n)$.*

DEFINIÇÃO D.0.5. *Seja W um subespaço vectorial do espaço vectorial V sobre um corpo K. O* ***anulador*** *ou* ***aniquilador*** *de W é o conjunto*

$$Ann(W) := \{f \in V^* : f(w) = 0, \quad \forall w \in W\}.$$

PROPOSIÇÃO D.0.6. *Seja W um subespaço vectorial de dimensão r dum espaço vectorial V de dimensão n sobre um corpo K. Então $Ann(W)$ é um subespaço vectorial de V^* de dimensão $n - r$.*

Demonstração: É fácil verificar que $Ann(W)$, sendo não vazio (pelo menos a forma linear identicamente nula pertence a $Ann(W)$), é fechado para a soma e para a multiplicação por escalares, pelo que é um subespaço vectorial de V^*.

Quanto à dimensão, basta verificar que, dada uma base $(v_1, \ldots, v_n)$ de V tal que $(v_1, \ldots, v_m)$ é uma base de W, então $(v_{m+1}^*, \ldots, v_n^*)$ é uma base de $Ann(W)$. □

PROPOSIÇÃO D.0.7. *Sejam W_1 e W_2 subespaços vectoriais de um espaço vectorial V de dimensão n. Então:*

1) $W_1 \subset W_2$ se e só se $Ann(W_1) \supset Ann(W_2)$;
2) $Ann(W_1 \cap W_2) = \langle Ann(W_1), Ann(W_2)\rangle$;
3) $Ann(\langle W_1, W_2\rangle) = Ann(W_1) \cap Ann(W_2)$.

Demonstração: A implicação 1) da esquerda para a direita é óbvia pela definição de anulador. Por outro lado, por contra recíproco, suponhamos que $W_1 \not\subset W_2$. Então, dado $w \in W_1$ tal que $w \notin W_2$, podemos construir uma base $(w_1, \ldots, w_k, w, w_{k+2}, \ldots, m_n)$ de V em que $(w_1, \ldots, w_k)$ é uma base de W_2. Assim temos uma base $(w^*, w_{k+2}^*, \ldots, w_n^*)$ para $Ann(W_2)$. Como, por definição $w^*(w) = 1$, e w^* não pode pertencer a $Ann(W_1)$, temos que $Ann(W_1) \not\supset Ann(W_2)$.

As afirmações 2) e 3) decorrem sem dificuldade da definição de anulador. □

APÊNDICE E

Grupo de Möbius generalizado

Neste Apêndice vamos estudar uma classe de aplicações da esfera de Riemann que desempenha um papel fundamental em geometria hiperbólica.

DEFINIÇÃO E.0.1. *Uma aplicação $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ diz-se uma* ***transformação de Möbius*** *se é da forma*

$$f(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tais que $ad - bc \neq 0$.

NOTA E.0.2. Se $f(z) = \frac{a\,z+b}{c\,z+d}$ é uma destas aplicações com $c \neq 0$ então $f(\infty) = \frac{a}{c}$. Caso contrário, se $c = 0$, temos $f(\infty) = \infty$.

Uma aplicação linear invertível $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, definida em relação à base canónica por uma matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}),$$

induz a projectividade $\tau : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ dada por

$$\tau([z_0 : z_1]) = [az_0 + bz_1 : cz_0 + dz_1]. \tag{E.0.1}$$

Usando a identificação de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ com $\overline{\mathbb{C}}$ em (4.3.1), podemos considerar uma aplicação $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ que a cada $z \neq \infty$ faz corresponder o ponto de $\overline{\mathbb{C}}$ definido por $\tau([z : 1])$, e tal que $f(\infty)$ é o ponto de $\overline{\mathbb{C}}$ definido por $\tau([1 : 0])$ (ou seja $[a : c]$). Como

$$\tau([z : 1]) = [az_0 + b : cz_0 + d] = \begin{cases} \left[\frac{az+b}{cz+d} : 1\right], & \text{se } cz + d \neq 0 \\ [1{:}0], & \text{c.c.,} \end{cases}$$

temos que $\tau([z : 1])$ é identificado com o ponto $\frac{a\,z+b}{c\,z+d} \in \overline{\mathbb{C}}$, onde $\frac{a\,z+b}{c\,z+d} = \infty$ se $cz + d = 0$. Por outro lado, $\tau([1 : 0])$ é identificado com o ponto $\frac{a}{c} \in \mathbb{C}$ se $c \neq 0$ e com ∞ se $c = 0$.

Assim, a projectividade de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ em (E.0.1) define a transformação de Möbius $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ dada por

$$f(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}.$$

Inversamente, a uma transformação de Möbius $f(z) = \frac{a\,z+b}{c\,z+d}$ podemos associar uma matriz 2×2 invertível de coeficientes complexos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$$

e duas matrizes $A, B \in GL(2, \mathbb{C})$ estão associadas a uma mesma transformação de Möbius se e só se existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $A = \lambda B$ (ou seja se a transformações lineares associadas induzem a mesma projectividade de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$).

Note que se f e g são duas transformação de Möbius definidas respectivamente por

$$f(z) = \frac{a_1\,z + b_1}{c_1\,z + d_1} \quad \text{e} \quad g(z) = \frac{a_2\,z + b_2}{c_2\,z + d_2},$$

então $f \circ g$ é a transformação de Möbius associada à matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix},$$

e que esta define uma transformação linear que induz a composta das projectividades de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ correspondentes a f e a g.

Em particular, as transformações de Möbius são bijectivas e a inversa de $f(z) = \frac{a\,z+b}{c\,z+d}$ é a transformação de Möbius associada à matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}.$$

Conclui-se assim que o conjunto das transformações de Möbius com a composição de aplicações forma um grupo, Möb^+, designado por **grupo de Möbius**, que pode ser identificado com o grupo das aplicações projectivas de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, também designado por **grupo linear geral projectivo**, $PGL(2, \mathbb{C})$. Assim, temos

$$\text{Möb}^+ \simeq GL(2, \mathbb{C}) / \left(A \sim \lambda A\right) =: PGL(2, \mathbb{C}),$$

onde consideramos em $GL(2, \mathbb{C})$ a relação de equivalência definida por

$$A \sim B \Leftrightarrow A = \lambda B \quad \text{para algum } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Alternativamente, a cada transformação de Möbius, $f(z) = \frac{a\,z+b}{c\,z+d}$, podemos sempre associar uma matriz de determinante 1 (basta dividir as entradas da matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

por uma raiz quadrada do seu determinante). Então, o grupo de Möbius pode também ser identificado com o **grupo linear especial projectivo**, $PSL(2,\mathbb{C})$,

$$\text{Möb}^+ \simeq PGL(2,\mathbb{C}) \simeq SL(2,\mathbb{C})/\left(A \sim (-A)\right) =: PSL(2,\mathbb{C}),$$

onde consideramos em $SL(2,\mathbb{C}) := \{A \in GL(2,\mathbb{C}) : \det A = 1\}$ a relação de equivalência definida por

$$A \sim B \Leftrightarrow A = B \quad \text{ou} \quad A = -B.$$

Os resultados seguintes são consequências imediatas da identificação anterior entre as transformações de Möbius e as projectividades de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Proposição E.0.3. *Uma transformação de Möbius diferente da identidade tem um ou dois pontos fixos em $\overline{\mathbb{C}}$.*

Demonstração: Como uma projectividade de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ diferente da identidade tem sempre um ou dois pontos fixos (ver Exemplo 3.6.12), o mesmo acontece com as transformações de Möbius. □

Corolário E.0.4. *Se $f \in Möb^+$ tem três pontos fixos distintos em $\overline{\mathbb{C}}$ então f é a identidade.*

Uma transformação de Möbius é então determinada univocamente pela imagem de três pontos distintos.

Teorema E.0.5. *Sejam z_1, z_2, z_3 três pontos distintos de $\overline{\mathbb{C}}$. Dados três pontos distintos $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ existe uma única transformação de Möbius f tal que $f(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$.*

Demonstração: Vejamos primeiro a unicidade. Se existem $f, g \in \text{Möb}^+$ tais que $f(z_i) = g(z_i) = w_i$ para $i = 1, 2, 3$ então, como

$$\left(f^{-1} \circ g\right)(z_i) = z_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3,$$

temos, pelo Corolário E.0.4, que $f^{-1} \circ g = id$ e então $f = g$.

A existência é consequência do Teorema 3.6.7 para projectividades de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, uma vez que quaisquer três pontos distintos de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ formam um referencial projectivo. □

NOTA E.0.6. Dados quaisquer três pontos distintos $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ é fácil encontrar a transformação de Möbius f que verifica

$$f(z_1) = \infty, \quad f(z_2) = 0 \quad \text{e} \quad f(z_3) = 1. \tag{E.0.2}$$

Para tal basta tomar

$$f(z) = \frac{z - z_2}{z - z_1} \cdot \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \quad \text{se} \quad z_1, z_2, z_3 \neq \infty,$$

$$f(z) = \frac{z - z_2}{z_3 - z_2} \ \text{ se } z_1 = \infty, \quad f(z) = \frac{z_3 - z_1}{z - z_1} \ \text{ se } \quad z_2 = \infty$$

ou

$$f(z) = \frac{z - z_2}{z - z_1} \quad \text{se } z_3 = \infty.$$

No primeiro caso esta aplicação é representada, por exemplo, pela matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_3 - z_1 & -z_2(z_3 - z_1) \\ z_3 - z_2 & -z_1(z_3 - z_2) \end{pmatrix},$$

cujo determinante é

$$ad - bc = (z_2 - z_1)(z_3 - z_2)(z_3 - z_1) \neq 0$$

(pois os três pontos são distintos). Nos outros casos, a aplicação é representada respectivamente pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & -z_2 \\ 0 & z_3 - z_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & z_3 - z_1 \\ 1 & -z_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & -z_2 \\ 1 & -z_1 \end{pmatrix},$$

cujos determinantes, $z_3 - z_2$, $z_1 - z_3$ ou $z_2 - z_1$ são diferentes de zero.

NOTA E.0.7. Dados quaisquer três pontos distintos $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ e três pontos distintos $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ é também fácil encontrar a transformação de Möbius f que verifica

$$f(z_1) = w_1, \quad f(z_2) = w_2 \quad \text{e} \quad f(z_3) = w_3. \tag{E.0.3}$$

Com efeito, se tivermos, como vimos na Nota E.0.6, $g, h \in \text{Möb}^+$ tais que

$$h(z_1) = \infty,\ h(z_2) = 0,\ h(z_3) = 1 \quad \text{e} \quad g(w_1) = \infty,\ g(w_2) = 0,\ g(w_3) = 1,$$

então $(g^{-1} \circ h)(z_i) = w_i$.

EXEMPLO E.0.8. Vejamos como determinar a transformação de Möbius $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ que satisfaz $f(1 + i) = 3 + 2i$, $f(2) = 3$ e $f(3i) = 0$. Para isso,

começamos por encontrar a transformação $h : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ tal que $h(1+i) = \infty$, $h(2) = 0$ e $h(3i) = 1$:

$$h(z) = \frac{z-2}{z-(1+i)} \cdot \frac{2i-1}{-2+3i} = \frac{z-2}{z-(1+i)} \cdot \frac{8-i}{13}.$$

Note que h pode, por exemplo, ser representada pela matriz

$$\begin{pmatrix} 8-i & -2(8-i) \\ 13 & -13(1+i) \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, a transformação de Möbius $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ que satisfaz $g(3+2i) = \infty$, $g(3) = 0$ e $g(0) = 1$ é

$$g(z) = \frac{z-3}{z-(3+2i)} \cdot \frac{3+2i}{3}$$

e pode ser representada pela matriz

$$\begin{pmatrix} 3+2i & -3(3+2i) \\ 3 & -3(3+2i) \end{pmatrix}.$$

Assim, g^{-1} pode ser dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} -3(3+2i) & 3(3+2i) \\ -3 & 3+2i \end{pmatrix}$$

e $f := g^{-1} \circ h$ pela matriz

$$\begin{pmatrix} -3(3+2i) & 3(3+2i) \\ -3 & 3+2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8-i & -2(8-i) \\ 13 & -13(1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39(1+i) & 117(1-i) \\ 15+29i & 35-71i \end{pmatrix},$$

pelo que

$$f(z) = \frac{39(1+i)z + 117(1-i)}{(15+29i)z + 35 - 71i}.$$

Considere-se agora uma transformação de Möbius

$$f(z) = \frac{a\,z+b}{c\,z+d}$$

diferente da identidade.

Se $c = 0$ então $f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ é a composta da translação $z \mapsto z + \frac{b}{d}$ com a dilatação $z \mapsto \frac{a}{d}z$.

Caso contrário, se $c \neq 0$, então f pode ser escrita na forma $f(z) = h_1 \circ h_2 \circ h_3$, onde

$$h_1(z) = -(ad-bc)z + \frac{a}{c}, \quad h_2(z) = \frac{1}{z} \quad \text{e} \quad h_3(z) = c^2 z + cd,$$

pois

$$\begin{pmatrix} -(ad-bc) & \frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c^2 & cd \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & bc \\ c^2 & cd \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Como h_1 e h_3 são compostas de translações com dilatações, temos o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO E.0.9. *Qualquer transformação de Möbius pode ser escrita como uma composta de translações, dilatações e a aplicação $z \mapsto 1/z$.*

Muitas propriedades das transformações de Möbius podem então ser provadas mostrando apenas que são válidas para translações, dilatações e para a aplicação $z \mapsto 1/z$. Como exemplo temos o seguinte resultado.

TEOREMA E.0.10. *Seja $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ uma transformação de Möbius. Então f transforma circunferências de $\overline{\mathbb{C}}$ em circunferências de $\overline{\mathbb{C}}$.*

NOTA E.0.11. As circunferências de $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ podem ser circunferências de $\mathbb{C}$ (se não passam em ∞) ou a união de uma recta de $\mathbb{C}$ com $\{\infty\}$.

Demonstração:

• Se f é uma translação então o resultado é trivial.

• Se f é uma dilatação $z \mapsto \lambda z$, com $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, e $\mathcal{C} \subset \overline{\mathbb{C}}$ é uma circunferência então, se $\mathcal{C}$ tem equação $|z-k| = r$, temos $|\lambda z - \lambda\, k| = |\lambda| r$, pelo que $f(\mathcal{C})$ é uma circunferência de $\overline{\mathbb{C}}$. Se $\infty \in \mathcal{C}$ então os pontos de $\mathcal{C} \setminus \{\infty\}$ pertencem a uma recta de $\mathbb{C}$, pelo que são da forma

$$z = z_0 + re^{\theta_0 i},$$

com $z_0 \in \mathbb{C}$ e $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ constantes e $r \in \mathbb{R}$. Então

$$(\lambda z) - (\lambda z_0) = \lambda r e^{\theta_0 i} = |\lambda| r e^{(\theta_0+\theta_1)i},$$

onde $\theta_1 \in [0, 2\pi[$ é tal que $\lambda = |\lambda| e^{\theta_1 i}$. Como $f(\infty) = \infty$ conclui-se que $f(\mathcal{C})$ é uma circuferência de $\overline{\mathbb{C}}$ que passa em ∞. Em particular, $f(\mathcal{C}) \setminus \{\infty\}$ é a recta de $\mathbb{C}$ cujos pontos são da forma

$$w = \lambda z_0 + te^{(\theta_0+\theta_1)i}, \quad \text{com} \quad t \in \mathbb{R}.$$

• Se $f(z) = 1/z$ e $\mathcal{C} \subset \overline{\mathbb{C}}$ é uma circunferência então, se $\mathcal{C}$ tem equação $|z-k| = r$, temos

$$(z-k)(\overline{z}-\overline{k}) = r^2 \Leftrightarrow |z|^2 - \overline{k}z - k\overline{z} + |k|^2 - r^2 = 0.$$

Escrevendo $w := f(z) = 1/z$, temos

$$\text{(E.0.4)}\quad \frac{1}{|w|^2} - \frac{\overline{k}}{w} - \frac{k}{\overline{w}} + |k|^2 - r^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - \overline{k}\overline{w} - kw + (|k|^2 - r^2)|w|^2 = 0.$$

Se $|k| \neq r$ então $\mathcal{C}$ não passa na origem (e consequentemente $f(\mathcal{C})$ não passa em ∞) e (E.0.4) implica que

$$|w|^2 - \frac{k}{|k|^2 - r^2}\, w - \frac{\overline{k}}{|k|^2 - r^2}\, \overline{w} + \frac{1}{|k|^2 - r^2} = 0,$$

pelo que $f(\mathcal{C})$ é uma circunferência de $\mathbb{C}$ de centro

$$\frac{\overline{k}}{|k|^2 - r^2}$$

e raio

$$\frac{r}{||k|^2 - r^2|}.$$

Se $|k| = r$ então $\mathcal{C}$ passa na origem (e consequentemente $\infty \in f(\mathcal{C})$) e então (E.0.4) implica que

$$1 - \overline{k}\overline{w} - kw = 0,$$

pelo que $f(\mathcal{C}) \setminus \{\infty\}$ é uma recta de $\mathbb{C}$ e $f(\mathcal{C})$ é uma circunferência de $\overline{\mathbb{C}}$ que passa em ∞. Note que, se $k = a + b\,i$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $w = x + y\,i$, então (E.0.4) é equivalente a

$$\mathrm{Re}\,(kw) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a\,x - b\,y = \frac{1}{2}.$$

Se $\infty \in \mathcal{C}$ então os pontos de $\mathcal{C} \setminus \{\infty\}$ verificam uma equação da forma

$$\text{(E.0.5)}\qquad \overline{k}\,z + k\overline{z} + c = 0$$

com $c \in \mathbb{R}$. Com efeito, se $z = x + yi$, uma recta $ax + by + c = 0$ pode ser escrita como

$$2\mathrm{Re}\,(\overline{k}z) + c = 0, \quad \text{ou seja} \quad \overline{k}\,z + k\overline{z} + c = 0,$$

onde $k = (a + bi)/2$.

Então, escrevendo $w := f(z) = 1/z$, temos que (E.0.5) implica

$$\frac{\overline{k}}{w} + \frac{k}{\overline{w}} + c = 0 \Leftrightarrow c|w|^2 + k\,w + \overline{k}\,\overline{w} = 0.$$

Se $c = 0$ temos que $\mathcal{C}$ passa na origem pelo que $f(\mathcal{C})$ passa em ∞ e os pontos de $f(\mathcal{C}) \setminus \{\infty\}$ verificam a equação $k\,w + \overline{k}\,\overline{w} = 0$.

Se $c \neq 0$ então $f(\mathcal{C})$ é a circunferência de $\mathbb{C}$

$$|w|^2 + \frac{k}{c}\, w + \frac{\overline{k}}{c}\, \overline{w} = 0$$

de centro $-\frac{\overline{k}}{c}$ e raio $\left|\frac{k}{c}\right|$. □

Como consequência temos o seguinte resultado.

TEOREMA E.0.12. *Dadas duas circunferências $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$ existe uma transformação de Möbius f tal que $f(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$.*

Demonstração: Vejamos primeiro que quaisquer três pontos distintos $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ determinam univocamente uma circunferência de $\overline{\mathbb{C}}$. Supondo que um dos pontos, por exemplo z_1, é igual a ∞ ou que os três pontos estão numa mesma recta ℓ de $\mathbb{C}$, então $\ell \cup \{\infty\}$ é a única circunferência de $\overline{\mathbb{C}}$ que contém os três pontos, onde ℓ é a recta de $\mathbb{C}$ que passa pelos pontos z_2 e z_3. Se nenhum dos pontos é igual a ∞ e os três pontos não estão sobre a mesma recta de $\mathbb{C}$, então pertencem à circunferência de $\mathbb{C}$ centrada no ponto M dado pela intersecção das mediatrizes dos segmentos de recta $[z_1, z_2]$ e $[z_2, z_3]$ e com raio igual à distância de M a qualquer um dos três pontos (ver Figura E.1). Com efeito,

$$d(z_1, M) = d(z_2, M) = d(z_3, M)$$

pois M está nas mediatrizes dos segmentos de recta $[z_1, z_2]$ e $[z_2, z_3]$. Como o centro de qualquer circunferência de $\mathbb{C}$ que passe pelos três pontos tem de pertencer necessariamente a estas duas mediatrizes, conclui-se que a circunferência fica univocamente determinada.

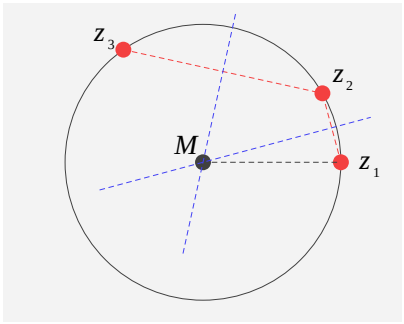

FIGURA E.1. Circunferência que passa por três pontos não colineares $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Para mostrar que existe $f \in \text{Möb}^+$ tal que $f(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$ basta escolher três pontos distintos z_1, z_2, z_3 em $\mathcal{C}_1$ e três pontos distintos w_1, w_2, w_3 em $\mathcal{C}_2$ e considerar a transformação de Möbius f dada pelo Teorema E.0.5 que satisfaz $f(z_i) = w_i$ para $i = 1, 2, 3$. Então, pelo Teorema E.0.10, a aplicação

f transforma a circunferência que passa em z_1, z_2, z_3 na circunferência que passa em w_1, w_2, w_3, ou seja, $f(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$. □

NOTA E.0.13. As transformações de Möbius dadas pelo Teorema E.0.12 não são únicas.

Um outra propriedade importante das transformações de Möbius é a seguinte.

TEOREMA E.0.14. *As transformações de Möbius preservam ângulos.*

Demonstração: O ângulo entre duas curvas $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ que se intersectam em $z_0 \in \mathbb{C}$ é, por definição, o ângulo entre as rectas tangentes correspondentes no ponto z_0. Se se intersectam em $z_0 = \infty$ então o ângulo entre elas é o ângulo entre as rectas $\ell, m \subset \mathbb{C}$ tais que $\ell \cup \{\infty\}$ e $m \cup \{\infty\}$ são tangentes às curvas em z_0. Neste caso, se ℓ e m se intersectam num outro ponto $z_1 \in \mathbb{C}$ então o ângulo entre as duas rectas em z_1 é igual ao ângulo entre $\ell \cup \{\infty\}$ e $m \cup \{\infty\}$ em $z_0 = \infty$ (ver Nota E.0.15). Se ℓ e m não se intesectam então o ângulo entre elas é zero e é preservado por qualquer transformação de Möbius (pois imagens de $\ell \cup \{\infty\}$ e $m \cup \{\infty\}$ intersectam-se apenas num ponto).

Assim, basta mostrar que, dadas duas rectas $\ell, m \subset \mathbb{C}$ que se intersectam em $z_0 \in \mathbb{C}$ temos $\measuredangle(\ell, m) = \measuredangle(f(\ell), f(m))$ em $f(z_0)$ e em $f(\infty)$.

Claramente as rotações e as translações de $\mathbb{C}$ preservam ângulos e transformam rectas em rectas (são isometrias euclidianas em $\mathbb{C}$ e também transformações de Möbius), pelo que podemos considerar, sem perda de generalidade, que ℓ é o eixo real, $\operatorname{Im} z = 0$, que ℓ e m se intersectam num ponto $a \in \mathbb{R}^+$ e que os pontos de m são da forma $a + te^{\alpha i}$ com $t \in \mathbb{R}$ e $\alpha = \measuredangle(\ell, m) \in]0, \frac{\pi}{2}]$.

Pela Proposição E.0.9, como as translações preservam ângulos, é suficiente mostrar que as dilatações e a aplicação $z \mapsto 1/z$ preservam ângulos.

Seja $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ a dilatação $f(z) = \lambda z$ com $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Então $f(\ell)$ é a recta que passa na origem e em λ e os pontos da recta $f(m)$ são da forma $\lambda a + \lambda t e^{\alpha i}$ com $t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\measuredangle\left(f(\ell), f(m)\right) = \arg(\lambda e^{\alpha i}) - \arg \lambda = \alpha,$$

pelo que f preserva ângulos.

Considere-se agora $f(z) = 1/z$. Então $f(\ell \cup \{\infty\}) = \ell \cup \{\infty\}$ e, se $a \neq 0$, a aplicação f transforma $m \cup \{\infty\}$ numa circunferência de $\mathbb{C}$ que passa em

0 e em $1/a$ cujos pontos são da forma

$$\frac{1}{a+te^{\alpha i}}, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Os vectores tangentes a esta circunferência no ponto $1/a$ têm a direcção de

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a+te^{\alpha i}}\right)\Big|_{t=0} = -\frac{1}{a^2}\,e^{\alpha i},$$

pelo que fazem um ângulo α com a recta ℓ (ver Figura E.2). Note que os vectores tangentes à circunferência em $f(\infty) = 0$ fazem também um ângulo α com a recta ℓ.

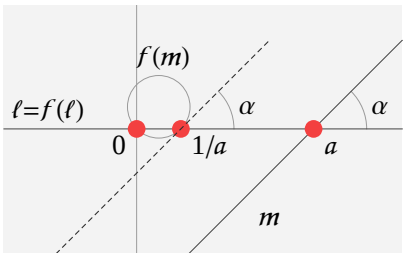

FIGURA E.2. Imagem de duas rectas ℓ e m pela aplicação $z \mapsto 1/z$.

Alternativamente, sabemos que o centro da circunferência $f(m)$ está na recta vertical $\operatorname{Re} w = \frac{1}{2a}$ (pois é equidistante de 0 e $\frac{1}{a}$) e que

$$\operatorname{Re}\left(f\left(a(1\pm e^{\alpha i})\right)\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1\pm e^{-\alpha i}}{a((1\pm\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha)}\right) = \frac{1}{2a}.$$

Assim, como $a(1 \pm e^{\alpha i}) \in m$, temos que a parte imaginária do centro da circunferência $f(m)$ é a média de

$$\operatorname{Im}\left(f(a(1+e^{\alpha i}))\right) = -\frac{\sin\alpha}{a((1+\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha)}$$

e

$$\operatorname{Im}\left(f(a(1-e^{\alpha i}))\right) = \frac{\sin\alpha}{a((1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha)},$$

pelo que o centro da circunferência $f(m)$ é o ponto

$$z_0 = \frac{1}{2a}\left(1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}i\right).$$

Então a recta que passa na origem e em z_0 faz um ângulo de $\pi/2-\alpha$ com o eixo real. Como este ângulo é igual a

$$\frac{\pi}{2} - \measuredangle(f(l), f(m)),$$

conclui-se que $\measuredangle(f(l), f(m)) = \alpha$ em $1/a$ e em 0.

□

NOTA E.0.15. Se ℓ e m são duas rectas no plano complexo, então, passando para S^2 pela inversa da projecção estereográfica (4.3.5), vemos que $\ell \cup \{\infty\}$ e $m \cup \{\infty\}$ correspondem a dois círculos em S^2 que se intersectam no polo norte $N = (0, 0, 1)$. Estes são a intersecção de S^2 com dois planos de $\mathbb{R}^3$ que intersectam o plano tangente a S^2 em N (o plano $z = 1$) em duas rectas que se intersectam em N, fazendo um determinado ângulo α (ver Figura E.3). Estas rectas são paralelas às duas rectas ℓ em m (contidas no plano $z = 0$) pelo que o ângulo entre elas é novamente α.

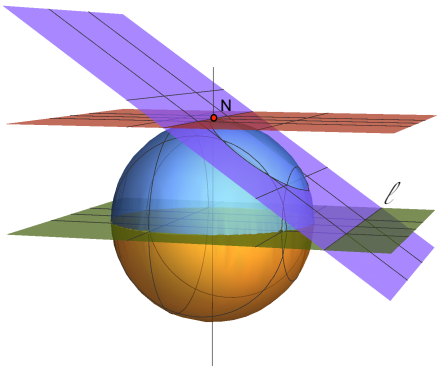

FIGURA E.3. Uma recta ℓ no plano complexo e o círculo correspondente de S^2.

Consideremos agora o **grupo de Möbius generalizado**, Möb, formado pelas transformações de Möbius e pelas composições destas com a aplicação $z \mapsto \overline{z}$, ou seja, as aplicações $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ da forma

$$f(z) = \frac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d},$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $ad - bc \neq 0$.

Uma classe importante de exemplos de elementos de $\text{Möb} \setminus \text{Möb}^+$ são as inversões em circunferências de $\overline{\mathbb{C}}$.

DEFINIÇÃO E.0.16. *A* **inversão na circunferência** $\mathcal{C} \subset \overline{\mathbb{C}}$ *de equação*

$$|z - z_0| = r$$

é a transformação $I_{\mathcal{C}} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *definida por*

$$I_{\mathcal{C}}(z) = \frac{z_0\overline{z} + r^2 - |z_0|^2}{\overline{z} - \overline{z}_0}. \tag{E.0.6}$$

Esta aplicação $I_{\mathcal{C}} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ faz corresponder a cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ o ponto z', no raio que une z_0 a z, que satisfaz

$$|z - z_0| \cdot |z' - z_0| = r^2 \tag{E.0.7}$$

(ver Figura E.4). Além disso, $I_{\mathcal{C}}(\infty) = z_0$ e $I_{\mathcal{C}}(z_0) = \infty$.

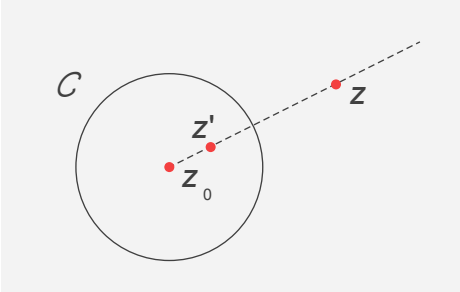

FIGURA E.4. Inversão numa circunferência.

Com efeito, se z' satisfaz (E.0.7) então

$$z' = z_0 + \frac{r^2}{|z - z_0|^2}(z - z_0) = z_0 + \frac{r^2}{\overline{z} - \overline{z}_0} = \frac{z_0\overline{z} + r^2 - |z_0|^2}{\overline{z} - \overline{z}_0},$$

pelo que obtemos a expressão em (E.0.6).

NOTA E.0.17. Como por (E.0.6) a inversão numa circunferência $\mathcal{C}$ é uma aplicação em $\mathrm{Möb} \setminus \mathrm{Möb}^+$ cujo conjunto de pontos fixos é $\mathcal{C}$, a sua expressão pode ser facilmente determinada a partir da equação de $\mathcal{C}$. Com efeito, temos

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{C}}(z) = z \Leftrightarrow |z - z_0|^2 = r^2 \Leftrightarrow (z - z_0)\,(\overline{z} - \overline{z}_0) = r^2 \\ \Leftrightarrow z = z_0 + \frac{r^2}{\overline{z} - \overline{z}_0} \Leftrightarrow z = \frac{z_0\overline{z} + r^2 - |z_0|^2}{\overline{z} - \overline{z}_0}, \end{aligned}$$

pelo que obtemos a expressão em (E.0.6)

$$I_{\mathcal{C}}(z) = \frac{z_0\overline{z} + r^2 - |z_0|^2}{\overline{z} - \overline{z}_0}.$$

Note que se $r^2 - |z_0|^2 = 1$, como é o caso de $\mathcal{C}_m$ em (4.3.14), recuperamos a expressão em (4.3.13).

Quando a circunferência de $\overline{\mathbb{C}}$ passa no infinito obtemos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO E.0.18. *A* **inversão na circunferência** $\mathcal{C} = \ell \cup \{\infty\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ *que passa no infinito, onde* $\ell \subset \mathbb{C}$ *é a recta de equação*

$$Az + \overline{A}\,\overline{z} = c,$$

com $A = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *e* $c \in \mathbb{R}$*, é a transformação* $I_{\mathcal{C}} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *definida por*

$$I_{\mathcal{C}}(z) = \frac{c}{A} - \frac{\overline{A}}{A}\,\overline{z}. \tag{E.0.8}$$

NOTA E.0.19. Como a aplicação $I_{\mathcal{C}} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ tem $\mathcal{C}$ como conjunto de pontos fixos e é um elemento de $\text{Möb} \setminus \text{Möb}^+$, uma forma fácil de obter a sua expressão é fazer

$$I_{\mathcal{C}}(z) = z \Leftrightarrow \begin{cases} Az + \overline{A}\,\overline{z} = c \\ \text{ou} \\ z = \infty \end{cases} \Leftrightarrow z = \frac{c}{A} - \frac{\overline{A}}{A}\,\overline{z},$$

pelo que

$$I_{\mathcal{C}}(z) = \frac{c}{A} - \frac{\overline{A}}{A}\,\overline{z} = \frac{c\overline{A} - \overline{A}^2\,\overline{z}}{|A|^2}.$$

NOTA E.0.20. Identificando $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$, facilmente verificamos que a restrição a $\mathbb{C}$ da aplicação (E.0.8) coincide com a reflexão euclidiana na recta ℓ. Com efeito, esta reflexão é dada por

$$\begin{aligned} &R_\ell(x,y) = \\ &= (x,y) - \frac{2}{a^2+b^2}\left\langle \left(x - \frac{ac}{2(a^2+b^2)}, y + \frac{bc}{2(a^2+b^2)}\right), (a,-b)\right\rangle (a,-b) \\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\left((b^2-a^2)x + 2ab\,y + ac, -(b^2-a^2)y + 2ab\,x - bc\right). \end{aligned}$$

Em geral, como $z \mapsto \overline{z}$ corresponde a uma reflexão no eixo O_x quando vista como uma aplicação de $\mathbb{R}^2$, temos que esta aplicação transforma rectas e circunferências de $\mathbb{C}$ respectivamente em rectas e circunferências de $\mathbb{C}$. Além disso também preserva ângulos (embora inverta a orientação) pois a aplicação de $\mathbb{R}^2$ correspondente é uma isometria linear de $\mathbb{R}^2$ (uma transformação ortogonal). Concluímos assim o seguinte resultado.

TEOREMA E.0.21. *Seja* $f \in \text{Möb}$*. Então* f *transforma circunferências de* $\overline{\mathbb{C}}$ *em circunferências de* $\overline{\mathbb{C}}$ *e* f *preserva ângulos.*

Tal como as transformações de Möbius, uma aplicação $f \in \text{Möb} \setminus \text{Möb}^+$ com três pontos fixos distintos fica univocamente determinada pelo seu conjunto de pontos fixos (apesar de não ser a identidade).

TEOREMA E.0.22. *Seja $f \in Möb \setminus Möb^+$. Se f fixa três pontos distintos de $\overline{\mathbb{C}}$ então f fixa a circunferência de $\overline{\mathbb{C}}$ que passa pelos três pontos.*

Em particular, se f fixa três pontos distintos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ não colineares em $\mathbb{C}$, então f é a inversão na circunferência de $\mathbb{C}$ que passa pelos três pontos. Se f fixa ∞ e dois pontos distintos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ou três pontos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ colineares em $\mathbb{C}$, então f é a inversão na circunferência de $\overline{\mathbb{C}}$ que passa nos três pontos (cuja restrição a $\mathbb{C}$ coincide com a reflexão na recta que passa nos pontos z_1 e z_2).

Demonstração: Seja $f \in \text{Möb} \setminus \text{Möb}^+$. Se f fixa três pontos distintos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ não colineares em $\mathbb{C}$ e $\mathcal{C}$ é a circunferência de $\mathbb{C}$ que passa nesses pontos, então, considerando a inversão $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ em $\mathcal{C}$, temos que $g^{-1} \circ f$ fixa z_1, z_2 e z_3. Como $g^{-1} \circ f \in \text{Möb}^+$ conclui-se, pelo Teorema E.0.4, que $g^{-1} \circ f = id$ e então $f = g$.

Se f fixa ∞ e dois pontos distintos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ou três pontos distintos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ colineares, considera-se a inversão g na circunferência de $\overline{\mathbb{C}}$ que passa nos três pontos (cuja restrição a $\mathbb{C}$ coincide com a reflexão na recta que passa nos pontos z_1 e z_2) e o resultado é análogo. □

Tal como no caso das transformações de Möbius temos também os seguintes resultados.

TEOREMA E.0.23. *Sejam z_1, z_2, z_3 três pontos distintos de $\overline{\mathbb{C}}$. Dados três pontos distintos $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ existe um único $f \in Möb \setminus Möb^+$ tal que $f(z_i) = w_i$.*

Demonstração: Vejamos primeiro a unicidade. Se existem $f, g \in \text{Möb} \setminus \text{Möb}^+$ tais que $f(z_i) = g(z_i) = w_i$ para $i = 1, 2, 3$, então como

$$\left(f^{-1} \circ g\right)(z_i) = z_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3,$$

temos, pelo Teorema E.0.4 que $f^{-1} \circ g = id$ e então $f = g$ (note que $f^{-1} \circ g$ é uma transformação de Möbius).

Quanto à existência, basta considerar a transformação de Möbius $g \in \text{Möb}^+$ tal que $g(\overline{z}_i) = w_i$ para $i = 1, 2, 3$ (cuja existência é garantida pelo Teorema E.0.5) e então a aplicação $f \in \text{Möb} \setminus \text{Möb}^+$ definida por

$$f(z) := g(\overline{z})$$

satisfaz $f(z_i) = w_i$ para $i = 1, 2, 3$. □

COROLÁRIO E.0.24. *Dadas duas circunferências* $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ *existe* $f \in \mathit{Möb} \setminus \mathit{Möb}^+$ *tal que* $f(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$.

NOTA E.0.25. Como consequência dos Teoremas E.0.5 e E.0.23, se $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ são três pontos distintos, então, dados três outros pontos distintos $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$, existem exactamente dois elementos f, g do grupo de Möbius generalizado tais que $f(z_i) = g(z_i) = w_i$ para $i = 1, 2, 3$.

Por exemplo, os elementos de Möb que fixam três pontos da circunferência unitária $|z| = 1$ são a identidade e a inversão $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$.

Bibliografia

Existem inúmeras obras versando os tópicos deste livro. Aqui referem-se apenas aquelas que directa ou indirectamente inspiraram a abordagem deste texto.

[1] James W. Anderson. *Hyperbolic geometry*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2005.

[2] Michèle Audin. *Geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[3] H. S. M. Coxeter. *Projective geometry*. Springer-Verlag, New York, 1994.

[4] Marvin Jay Greenberg. *Euclidean and non-Euclidean geometries*. W. H. Freeman and Company, New York, third edition, 1993.

[5] George Edward Martin. *Transformation geometry*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[6] Elmer G. Rees. *Notes on geometry*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1983.

[7] Miles Reid and Balázs Szendrői. *Geometry and topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[8] P. J. Ryan. *Euclidean and non-Euclidean geometry, An Analytic Approach*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[9] John Stillwell. *Geometry of Surfaces*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1992.

Índice Remissivo

ângulo
  entre hiperplanos, 55
  entre recta e hiperplano, 55
  entre rectas, 55
  entre vectores, 236
  geométrico, 82
  orientado
    entre rectas, 237
    entre vectores, 236

afim
  espaço, 9
  subespaço, 11
anel, 233
  comutativo, 233
  de divisão, 233
aniquilador, 246
anulador, 246
aplicação
  afim, 32
  linear associada a uma aplicação afim, 33
  ortogonal, 79, 239
  projectiva, 140

baricentro, 43
bissector, 61

círculo máximo, 162
carta afim, 134
Cauchy-Schwarz, 53
  desigualdade de, 235
centro
  de massa, 43
  de simetria, 104, 125
  de uma rotação, 83
  geométrico, 29
centroide, 29
Chasles
  Relação de, 9
circunferência
  hiperbólica, 197
  na esfera de Riemann, 182
codimensão
  de subespaço afim, 14
  de subespaço projectivo, 131
combinação
  afim, 19
  convexa, 30
comprimento
  de segmento de recta, 54
  de vector, 235
congruência de conjuntos, 104
convexidade, 30
convexo
  conjunto, 30
  fecho, 30
  invólucro, 30
coordenadas homogéneas, 130
corpo, 233

Desargues
  Teorema de, 48, 157
desigualdade
  de Cauchy-Schwarz, 53, 235
  triangular, 53, 160, 170, 199, 236
dilatação, 34

dimensão
  de subespaço afim, 14
  de subespaço projectivo, 130
Disco de Poincaré, 200
distância
  entre pontos, 53
  entre subespaços afins, 56
  esférica, 160
    desigualdade triangular, 160
  hiperbólica, 195, 201
  projectiva, 170
    desigualdade triangular, 170
dual
  base, 245
  de uma afirmação, 139
  espaço, 245
dualidade
  Princípio da, 140

eixo
  de rotação, 106
  de simetria, 104, 126
enviesadas (rectas), 18
equibaricentro, 29
esfera S^2, 159
esfera de Riemann, 178
espaço vectorial
  estrutura afim dum, 11
espaço
  afim, 9
    euclidiano, 51
    real, 25
  dual, 245
  projectivo, 129
espaço projectivo
  coordenadas homogéneas, 130
  pontos de um, 129
estrutura canónica afim, 11
euclidiano
  espaço afim, 51
extremidade de um vector, 10

face de um simplex, 28
fecho
  convexo, 30
  projectivo, 132
forma linear, 245

grupo, 231
  abeliano, 231
  afim, 39
  cíclico, 232
  de Möbius, 248
    generalizado, 257
  diedral, 102
  finito, 232
  linear especial projectivo, 249
  linear geral projectivo, 248
grupo de Möbius, 248
  generalizado, 257

hiperbólica
  circunferência, 197
  distância, 201
  recta, 196, 201
  reflexão, 204
  reflexão com deslize (ou deslizante), 215
  translação, 207
  rotação, 206
hiperbólico
  trtângulo, 221
hiperplano, 14
  mediador, 61
  perpendicular, 52
  projectivo, 131
horociclo, 208

independência afim, 18
invólucro convexo, 30
inversão
  num ponto, 70, 108
  numa circunferência, 183, 257, 259
isometria
  euclidiana, 68
    directa, 80
    inversa, 80
  hiperbólica
    directa, 213
    inversa, 213

isometrias
  da esfera S^2, 167
  de $\mathbb{R}^2$, 93
  de $\mathbb{R}^3$, 105
  do plano elíptico, 177
  hiperbólicas, 210
  na esfera de Riemann, 182
  subgrupos de, 100
isomorfismo afim, 39

Leonardo
  Teorema de, 102

Möbius
  grupo de, 248
  transformação de, 247
mediana de um triângulo, 28
mediatriz, 61
medida de ângulo geométrico, 82
meia-volta, 70
mergulho, 138
moção rígida, 68

norma de um vector, 235

origem
  de um referencial, 21
  de um vector, 10
ortogonal
  aplicação, 79

Pappus
  Teorema de, 47, 156
parafuso, 106, 108
paralelogramo, 26
plano
  afim, 14
  elíptico, 169, 173
  hiperbólico, 191
  projectivo, 131, 132
    real, 129
Poincaré
  disco de, 200
polígono, 103
  regular, 103
ponto, 10, 14
  médio, 26
  simétrico, 61
pontos
  combinação afim de, 19
  combinação convexa de, 30
  independentes, 18, 133
Princípio da Dualidade, 140
projecção
  esteregráfica, 178
  num subespaço afim, 47
  ortogonal, 65
projectiva (aplicação), 140
projectividade, 146
  elíptica, 146
  hiperbólica, 146, 147
  parabólica, 146, 147
projectivo
  espaço, 129
  fecho, 132
  plano, 132
  referencial, 143
  subespaço, 130

razão cruzada, 147
recta, 14
  enviesada, 18
  esférica, 162
  hiperbólica, 196, 201
  mediatriz, 61
  perpendicular, 52
  projectiva, 131, 147
    complexa, 130
  ultraparalela, 213
referencial, 21
  origem do, 21
  ortogonal, 51
  ortonormado, 51
  projectivo, 143
    canónico, 143
reflexão
  esférica, 163
  euclidiana, 62, 69, 83, 106
    forma normal, 81

hiperbólica, 204, 220
num hiperplano, 69
num ponto, 70
num círculo máximo de S^2, 167
reflexão com deslize (ou deslizante)
euclidiana, 71, 83, 106
hiperbólica, 215, 220
Regra do Paralelogramo, 11
Relação de Chasles, 9
Relação de Thomsen, 125
Relação triangular, 9
rotação
eixo de, 106
euclidiana
em $\mathbb{R}^2$, 83
em $\mathbb{R}^3$ (em torno de um eixo), 106
hiperbólica, 206, 220
na esfera S^2, 167
rotação com reflexão, 106, 108
rotação limite, 208, 220

segmento de recta, 25
comprimento, 54
semi-espaço
aberto, 32
fechado, 32
semi-recta, 26
simetria, 102
centro de, 104, 125
eixo, 126
eixo de, 104
simplex, 27
face de um, 28
vértice de um, 28
sistema de massas pontual, 43
subespaço afim, 11
codimensão, 14
dimensão, 14
direcção, 11
espaço de direcções, 11
gerado por um conjunto, 17
intersecção, 15
paralelo, 15
subespaço projectivo, 130
codimensão de, 131
dimensão, 130
gerado por um conjunto, 132
subgrupo, 231
gerado, 232

Teorema
de Desargues, 48, 157
de Leonardo, 102
de Pappus, 47, 156
de Thales, 47
tetraedro, 28
Thales
Teorema de, 47
Thomsen
Relação de, 125
transformação
de Möbius, 247
helicoidal, 106, 108
translação, 34, 69, 83, 105, 106
hiperbólica, 207, 220
triângulo
centro geométrico, 29
centroide, 29
esférico, 167
hiperbólico, 221
lados, 28
mediana, 28

ultraparalela (recta), 213

vértice de um simplex, 28
vector normal, 51
unitário, 51
vizinhança de coordenadas afins, 134