Há Filas de Espera sem *Stress*!
Mito ou realidade?

António Pacheco

O tratamento matemático das filas de espera surgiu há aproximadamente:

(a) 50 anos
(b) 100 anos
(c) 200 anos
(d) 300 anos
(e) 400 anos

O primeiro trabalho de natureza matemática sobre filas de espera é:

A. K. Erlang (1909). *The Theory of Probabilities and Telephone Conversations*. Nyt tidsskrift for Matematik B, vol. 20, p. 33.

Erlang foi um engenheiro dinamarquês que trabalhou na Companhia de Telefones da Dinamarca e lançou muitas das ideas usadas na teoria de filas de espera.

A caracterização do sistema associado a uma fila de espera envolve (pelo menos) a descrição de:

- Processo de chegadas de clientes
- Número de servidores
- Durações dos serviços
- Capacidade do sistema
- Ordem de serviço de clientes

Ideias para outros factores que poderão ser adicionados?

Aqui vamos considerar:

- 1 servidor
- capacidade infinita
- processo de chegadas simples com taxa constante e sem memória (processo de Poisson)
- duração dos serviços sem memória (distribuição Exponencial)
- clientes atendidos por ordem de chegada ao sistema (FIFO: *first in first out*)

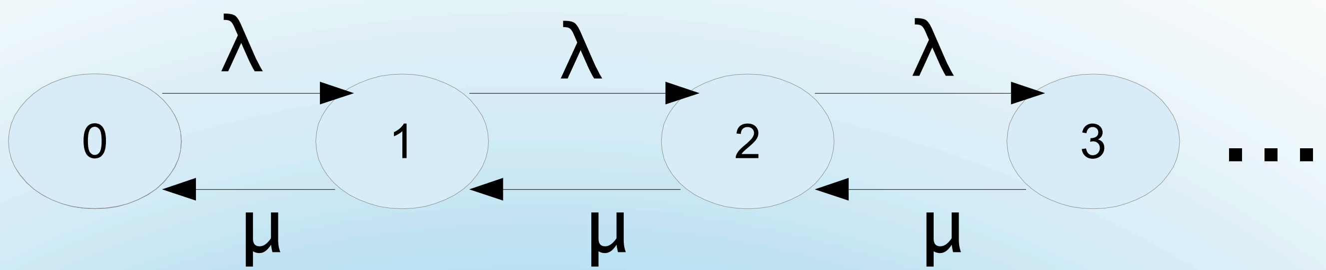
Na notação de D.G. Kendall: fila M/M/1/∞

Parâmetros do sistema:

- taxa de chegada de clientes: λ
- taxa de terminação de serviço: μ

intensidade de tráfego: $\rho=\lambda/\mu$

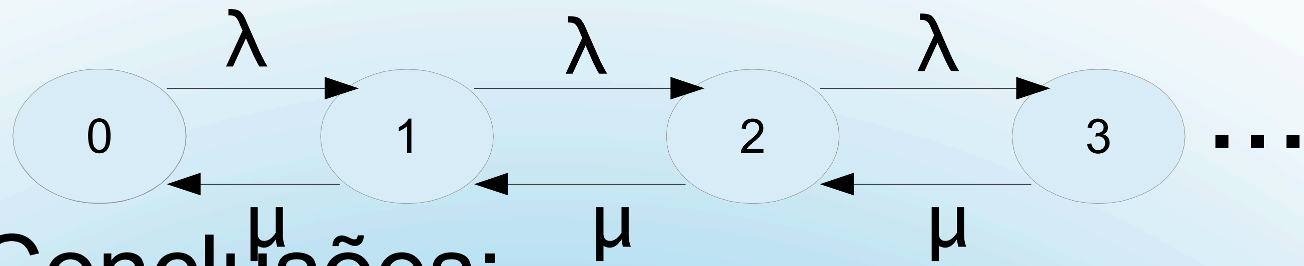
Quantidades a determinar:
p_k: fracção de tempo (a longo prazo) que há k clientes no sistema, $k=0,1,2,...$
L: número médio de clientes no sistema



Para o estado k=0,1,2,..., que expressão tem:

- taxa de transição de k para k+1?
- taxa de transição de k+1 para k?

Que relação existe entre as taxas de transição de k para k+1 e de k+1 para k?



Conclusões:

- Se $\rho \geq 1$ ($\lambda \geq \mu$), o sistema passa uma fracção nula de tempo em cada estado
- Se $\rho < 1$ ($\lambda < \mu$), o sistema permanece com k clientes uma fracção de tempo $(1-\rho)\rho^k$, conduzindo a numero médio de clientes no sistema

$$L = \rho/(1-\rho)$$

Com $\rho \geq 1$ o stress não tem limites, mas será que $\rho < 1$ é condição suficiente para não haver stress?

ρ	L
0.5	1
0.8	4
0.9	10
0.95	19
0.99	99
0.995	199
0.999	999

Problema: Considerar o modelo de perda de Erlang (Erlang's loss model ou Erlang's B model) M/M/m/m – sistema com m servidores e sem posições de espera, que serve para modelar o número de linhas ocupadas em centrais telefónicas analógicas.

Questões:

1. Determinar p_m, a probabilidade de bloqueio (fracção de chamadas rejeitadas a longo prazo) dado (ρ, m).
2. Dado ρ determinar o valor mínimo de linhas (m) que garante que a probabilidade de bloqueio não seja superior a p, valor no intervalo (0,1).