Cálculo Diferencial e Integral II

2º Teste - Versão 1A

14 de Janeiro 2012

Duração: 90 minutos

1. Considere o sólido $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \geq 0\,;\, x^2+y^2 \leq 1\,;\, 0 \leq z \leq 2-x^2-y^2\}$.

(2.5 val.) a) Obtenha uma expressão para o volume de V usando integrais triplos da forma $\int(\int(\int ...dx)dy)dz$.

Resolução: Os cortes de V com z igual a constante, para $0 \leq z \leq 1$ são meio-discos $x^2+y^2 \leq 1\,;\, x \geq 0$, independentes de z, e para $1 \leq z \leq 2$ são meio-discos $x^2+y^2 \leq 2-z\,;\, x \geq 0$, cujo raio depende de z. Os cortes com y igual a constante para estes cortes são respetivamente $0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$ e $0 \leq x \leq \sqrt{2-z-y^2}$. Assim uma expressão para o volume de V com a ordem de integração indicada é:

$$\int_0^1 \left(\int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} 1\, dx \right) dy \right) dz + \int_1^2 \left(\int_{-\sqrt{2-z}}^{\sqrt{2-z}} \left(\int_0^{\sqrt{2-z-y^2}} 1\, dx \right) dy \right) dz.$$

(3 val.) b) Através de uma mudança de coordenadas apropriada calcule o momento de inércia de V relativo ao eixo Oz considerando uma densidade de massa $\kappa(x,y,z) = x$.

Resolução: O momento de inércia do enunciado é o integral triplo $I_z = \iiint_V (x^2+y^2)\kappa(x,y,z)$. Fazendo uma mudança de coordenadas para coordenadas cilíndricas ρ, θ, z obtém-se:

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^{2-\rho^2} \rho^2 \,.\, \rho\cos\theta \,.\, \rho\, dz\, d\rho\, d\theta \\ &= [\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 \rho^4(2-\rho^2)\, d\rho \\ &= 2\,.\left[\frac{2}{5}\rho^5 - \frac{1}{7}\rho^7\right]_0^1 = 2.\frac{14-5}{35} = \frac{18}{35}. \end{aligned}$$

(3 val.) 2. Calcule a massa do fio definido pelas equações $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{8} = 1$ e $y = z$ com densidade de massa dada por $\sigma(x,y,z) = \sqrt{4+x^2}$.

Resolução: Projetando a linha do fio no plano Oxy através da substituição $z = y$ na primeira equação, obtém-se a circunferência dada por $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4} = 1$. Uma parametrização da linha é portanto $g(\theta) = (2\cos\theta,\, 2\sin\theta,\, 2\sin\theta)$, com $0 < \theta < 2\pi$. A massa do fio é o integral da densidade de massa ao longo da linha L, ou seja:

$$\begin{aligned} M = \int_L \sigma &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4+4\cos^2\theta} \,.\, \sqrt{(-2\sin\theta)^2+(2\cos\theta)^2+(2\cos\theta)^2}\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4+4\cos^2\theta} \,.\, \sqrt{4+4\cos^2\theta}\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 4+4\cos^2\theta\, d\theta \\ &= 8\pi + 4\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)+1}{2}\, d\theta = 8\pi + 4\pi = 12\pi. \end{aligned}$$

3. Considere os seguintes campos vetoriais

$$F(x,y) = \left(-\frac{y-1}{x^2+(y-1)^2}, \frac{x}{x^2+(y-1)^2}\right), \quad G(x,y) = (2x+y, 2y+x),$$

e as curvas

$$C_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x+1)^2 + y^2 = 1\right\}, \quad C_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + (y-1)^2 = 1\right\}$$
$$C_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x^2, 0 < x < 1\right\}, \quad C_4 \text{ é a fronteira de } [-2,2] \times [-2,2].$$

Indique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

Nota Importante: Responda apenas verdadeiro ou falso para cada uma das alíneas. Nesta pergunta não há cotação para justificações ou cálculos, mas note que cada resposta errada será cotada com -**0.5** valores.

(0.5 val.) (a) $\oint_{C_1} F \cdot dg = 2\pi$, onde C_1 é percorrida no sentido anti-horário;

(0.5 val.) (b) $\int_{C_3} G \cdot dg = 3$, onde C_3 é percorrida no sentido crescente de x;

(0.5 val.) (c) $\oint_{C_4} F \cdot dg = 2\pi$, onde C_4 é percorrida no sentido anti-horário;

(0.5 val.) (d) $\oint_{C_4} G \cdot dg = -2\pi$, onde C_4 é percorrida no sentido horário;

(0.5 val.) (e) $\oint_{C_2} F \cdot dg = 2\pi$, onde C_2 é percorrida no sentido anti-horário;

Resolução:

(a) **F**
(b) **V**
(c) **V**
(d) **F**
(e) **V**

4. Sejam $F = \operatorname{rot} G$ onde $G(x,y,z) = (0,x,y)$ e

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - \sqrt{x^2+y^2},\ 1 < x^2+y^2 < 4\right\}.$$

(3 val.) (a) Calcule, pelo Teorema de Stokes, o fluxo $\iint_S F \cdot n$, onde n é a normal unitária de S satisfazendo $n_z > 0$.

Resolução: Dado que $F = \operatorname{rot} G$, aplicando o Teorema de Stokes, obtemos

$$\iint_S F \cdot n = \iint_S \operatorname{rot} G \cdot n = \oint_{\partial S} G \cdot dg.$$

Ora, $\partial S = C_0 \cup C_1$, onde

$$C_0 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 4, \quad z = 0\right\},$$
$$C_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1, \quad z = 1\right\},$$

e, de acordo com a normal n acima, C_0 é percorrida no sentido anti-horário e C_1 é percorrida no sentido horário quando visto do ponto $(0,0,10^{10^{10}})$.
Portanto,

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S} G \cdot dg &= \int_0^{2\pi} (0, 2\cos t, 2\operatorname{sen} t) \cdot (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, 0)\, dt \\ &\quad - \int_0^{2\pi} (0, \cos t, \operatorname{sen} t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 4\cos^2 t\, dt - \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = 3\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = 3\pi.\end{aligned}$$

(3 val.) (b) Aplique o Teorema da Divergência para calcular $\iint_N F \cdot n$, onde

$$N = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1,\ 0 < z < 1\right\},$$

e n é a normal unitária que aponta para fora de N.

Resolução: Consideremos o aberto

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 1,\ 0 < z < 1\right\}.$$

Temos $\partial V = N \cup T_0 \cup T_1$, onde

$$\begin{aligned} T_0 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1,\ z = 0\right\}, \\ T_1 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1,\ z = 1\right\}. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema da Divergência, obtemos

$$\iint_N F \cdot n_{\text{ext}} + \iint_{T_0} F \cdot n_{\text{ext}} + \iint_{T_1} F \cdot n_{\text{ext}} = \iiint_V \operatorname{div} F = \iiint_V 0 = 0.$$

Portanto,

$$\iint_N F \cdot n_{\text{ext}} = -\iint_{T_0} F \cdot n_{\text{ext}} - \iint_{T_1} F \cdot n_{\text{ext}}.$$

Notando que $F = \operatorname{rot} G = (1,0,1)$, que $n_{\text{ext}} = (0,0,1)$ em T_1 e que $n_{\text{ext}} = (0,0,-1)$ em T_0, vem

$$-\iint_{T_0} F \cdot n_{\text{ext}} - \iint_{T_1} F \cdot n_{\text{ext}} = \iint_{T_0} F_3 - \iint_{T_1} F_3 = \operatorname{vol}_2(T_0) - \operatorname{vol}_2(T_1) = 0.$$

(3 val.) 5. Seja $C \subset \mathbb{R}^2$ uma variedade-1. Dado um campo vetorial $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e um campo unitário $n\colon C \to \mathbb{R}^2$, normal a C (*i.e.*, $\forall_{(x,y)\in C}\ n(x,y) \in T^{\perp}_{(x,y)}C$ e $||n(x,y)|| = 1$), define-se $\int_C F \cdot n$ como o integral de linha do campo escalar $F \cdot n$.

Sejam $R \subset \mathbb{R}^2$ um domínio regular tal $C = \partial R$ é uma variedade-1 conexa, $n\colon C \to \mathbb{R}^2$ a normal exterior unitária de R, e $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Mostre que

$$\oint_C \nabla(r^4) \cdot n = 16(I_x + I_y),$$

onde C é percorrida no sentido anti-horário, e I_x, I_y são respetivamente os momentos de inércia de R em relação aos eixos Ox, Oy, supondo a densidade de massa constante igual a 1.

Sugestão: Aplique o Teorema de Green a um campo vetorial apropriado.

Resolução: Temos $\nabla(r^4) = \left(4r^3\frac{x}{r}, 4r^3\frac{y}{r}\right) = (4r^2x, 4r^2y)$. Seja $g\colon [a,b] \to C$ uma parametrização que percorre C no sentido anti-horário. Aplicando a definição de fluxo acima, obtemos

$$\oint_C \nabla(r^4) \cdot n = \int_a^b (4r^2(g(t))g_1(t), 4r^2(g(t))g_2(t)) \cdot n(g(t))||g'(t)||dt. \tag{1}$$

Dado que $g'(t) \in T_{g(t)}C$, o vetor $(g_2'(t), -g_1'(t))$ pertence ao espaço normal $T^{\perp}_{g(t)}C$, pois

$$(g_1'(t), g_2'(t)) \cdot (g_2'(t), -g_1'(t)) = g_1'(t)g_2'(t) - g_2'(t)g_1'(t) = 0.$$

Como g percorre C no sentido anti-horário, o vetor $(g_2'(t), -g_1'(t))$ aponta para o exterior de R.

Concluímos que a normal exterior unitária n é dada por

$$n(g(t)) = \frac{1}{||g'(t)||}(g_2'(t), -g_1'(t)).$$

Substituindo em (1) vem,

$$\begin{aligned}
\oint_C \nabla(r^4)\cdot n &= \int_a^b (4r^2(g(t))g_1(t), 4r^2(g(t))g_2(t)) \cdot \frac{1}{||g'(t)||}(g_2'(t), -g_1'(t))||g'(t)||dt \\
&= \int_a^b (4r^2(g(t))g_1(t), 4r^2(g(t))g_2(t)) \cdot (g_2'(t), -g_1'(t))dt \\
&= \int_a^b 4r^2(g(t)) \left[g_1(t)g_2'(t) - g_2(t)g_1'(t)\right] dt \\
&= \oint_C Pdx + Qdy,
\end{aligned}$$

onde $P(x,y) = -4(x^2+y^2)y$ e $Q(x,y) = 4(x^2+y^2)x$. Aplicando o Teorema de Green, obtemos

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 16 \iint_R (x^2+y^2) = 16(I_x + I_y).$$