Análise Matemática III
1º semestre de 2006/2007

Exercício teste 7 (a entregar na aula prática da semana de 6/11/2006)

O sistema de equações para as incógnitas x e y:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x^3 & - & 3xy^2 & = & u \\ 3yx^2 & - & y^3 & = & v \end{array}\right.$$

admite uma solução óbvia para $u = -2$, $v = 2$: a solução é $x = y = 1$. Mostre que existem soluções do sistema da forma $x = p(u,v)$, $y = q(u,v)$ para (u,v) numa vizinhança do ponto $(-2,2)$, tal que $p(-2,2) = q(-2,2) = 1$, sendo p, q funções de classe C^1. Calcule as derivadas parciais:

$$\frac{\partial q}{\partial u}(-2,2), \quad \frac{\partial p}{\partial v}(-2,2).$$

Resolução

A função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$F(x,y) = (x^3 - 3xy^2,\, 3yx^2 - y^3)$$

é de classe C^1. Tem-se ainda $F(1,1) = (-2,2)$ e

$$\begin{aligned} \det DF(1,1) &= \det \left.\begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ 6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}\right|_{(x,y)=(1,1)} \\ &= \det \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = 36 \neq 0. \end{aligned}$$

Então, pelo teorema da função inversa, existem vizinhanças U de $(x,y) = (1,1)$ e V de $(u,v) = (-2,2)$, tal que F é injectiva em U, $F(U) = V$, e a função inversa $F^{-1}(u,v) = (p(u,v), q(u,v))$ é de classe C^1 em V, ou seja existem soluções do sistema da forma $x = p(u,v)$, $y = q(u,v)$ para (u,v) numa vizinhança do ponto $(-2,2)$, tal que $p(-2,2) = q(-2,2) = 1$, sendo p, q funções de classe C^1.

A matriz derivada da função inversa tem a propriedade:

$$DF^{-1}(-2,2) = (DF(1,1))^{-1}.$$

Portanto

$$\left.\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial u} & \frac{\partial p}{\partial v} \\ \frac{\partial q}{\partial u} & \frac{\partial q}{\partial v} \end{pmatrix}\right|_{(u,v)=(-2,2)} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix},$$

donde se conclui:

$$\frac{\partial q}{\partial u}(-2,2) = -\frac{1}{6}, \quad \frac{\partial p}{\partial v}(-2,2) = \frac{1}{6}.$$