Análise Matemática III
1º semestre de 2006/2007

Exercício teste 12 (a entregar na aula prática da semana de 11/12/2006)

Considere a superfície

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y = x^2 + z^2, \ y < 4\}$$

e o campo vectorial em $\mathbb{R}^3$,

$$F = (2z, x, z).$$

Calcule o fluxo de $\mathrm{rot}(F)$ através de B no sentido da normal unitária com 2ª componente positiva:

a) Pela definição de fluxo.

Resolução. O rotacional de F é

$$\begin{aligned} G &= \mathrm{rot}(F) = \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \vec{k} = \\ &= 0\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + \vec{k} = (0, 2, 1)\,. \end{aligned}$$

A superfície B é uma parte de um paraboloide com simetria de rotação em torno do eixo Oy. Em coordenadas cilindrícas adaptadas à simetria do problema,

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = y \\ z = \rho\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$$

temos que

$$y = x^2 + z^2 \Leftrightarrow y = \rho^2.$$

Uma parametrização de $\widetilde{B} = B \setminus \{(x, y, 0), \ x \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$ é então dada por

$$g \ : \ \begin{cases} x = \rho\ \cos(\theta) \\ y = \rho^2 \\ z = \rho\ \mathrm{sen}(\theta) \end{cases} \quad , \ 0 < \rho < 2, 0 < \theta < 2\pi.$$

Temos

$$D_\rho g = (\cos(\theta), 2\rho, \mathrm{sen}(\theta)), \ D_\theta g = (-\rho\ \mathrm{sen}(\theta), 0, \rho\cos(\theta))$$

e portanto

$$
\begin{aligned}
D_\rho g \times D_\theta g &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(\theta) & 2\rho & \operatorname{sen}(\theta) \\ -\rho \operatorname{sen}(\theta) & 0 & \rho\cos(\theta) \end{pmatrix} = \\
&= 2\rho^2 \cos(\theta)\ \vec{i} - \big(\rho\cos^2(\theta) + \rho \operatorname{sen}^2(\theta)\big)\ \vec{j} + 2\rho^2 \operatorname{sen}(\theta)\ \vec{k} = \\
&= \big(2\rho^2\cos(\theta), -\rho, 2\rho^2 \operatorname{sen}(\theta)\big)\,.
\end{aligned}
$$

Vemos que o vector $D_\rho g \times D_\theta g$ tem sentido oposto à normal unitária de B.

Para o fluxo obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_B \operatorname{rot}(F)\cdot n_B\ dS &= -\int_0^2 \int_0^{2\pi} (0,2,1)\cdot \big(2\rho^2\cos(\theta), -\rho, 2\rho^2 \operatorname{sen}(\theta)\big)\ d\theta d\rho = \\
&= -\int_0^2 \int_0^{2\pi} \big(-2\rho + 2\rho^2 \operatorname{sen}(\theta)\big)\ d\theta d\rho = \\
&= \int_0^2 \big(4\pi\rho + 2\rho^2\cos(\theta)|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\big)\ d\theta d\rho = \\
&= 2\pi\rho^2|_0^{2\pi} = 8\pi.
\end{aligned}
$$

b) Usando o teorema de Stokes.

Resolução.

O teorema de Stokes aplica-se ao fluxo de campos rotacionais como é o caso de $G = \operatorname{rot}(F)$:

$$\int_B \operatorname{rot}F \cdot n_B\ dS = \int_\Gamma F\cdot dh,$$

onde $\Gamma = \partial B$, é a fronteira de B,

$$\Gamma = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ y=4,\ x^2+z^2=4\big\}$$

percorrida no sentido antihorário para um observador no ponto $(0,10,0)$.

Uma parametrização de Γ (menos um ponto) é dada por

$$h\ :\ \begin{cases} x = 2\cos(\theta) \\ y = 4 \\ z = -2\operatorname{sen}(\theta) \end{cases},\ 0<\theta<2\pi.$$

Temos então,

$$
\begin{aligned}
\int_B \operatorname{rot}(F)\cdot n_B\ dS &= \int_\Gamma F\cdot dh = \\
&= \int_0^{2\pi} (-4\operatorname{sen}(\theta), 2\cos(\theta), -2\operatorname{sen}(\theta))\cdot(-2\operatorname{sen}(\theta), 0, -2\cos(\theta))\ d\theta = \\
&= 8\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(\theta)\ d\theta + 4\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)\ d\theta = \\
&= 4\int_0^{2\pi} (1-\cos(2\theta))\,d\theta + 2\operatorname{sen}^2(\theta)|_0^{2\pi} = 8\pi\ .
\end{aligned}
$$

c) Usando o teorema da divergência.

Resolução.

Consideremos o sólido

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + z^2 < y < 4\right\}.$$

A superfície B é parte da fronteira de D,

$$\partial D = B \cup T,$$

onde

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; y = 4,\; x^2 + z^2 \leq 4\right\}.$$

Aplicando o teorema da divergência ao campo $G = \mathrm{rot}(F) = (0,2,1)$ e à região D, e uma vez que $\mathrm{div}(G) = \mathrm{div}\,\mathrm{rot}(F) = 0$, obtemos

$$0 = \iiint_D \mathrm{div}(G) = \int_{\partial D} G \cdot \nu \; dS = -\int_B G \cdot n_B \; dS + \int_T G \cdot n_T \; dS,$$

onde n_T é a normal unitária de T, exterior a D, $n_T = (0,1,0)$. Temos então

$$\begin{aligned} \int_B G \cdot n_B \; dS &= \int_T G \cdot n_T \; dS = \\ &= \int_T (0,2,1) \cdot (0,1,0) \; dS = \int_T 2 \; dS = 2\,\mathrm{Area}(T) = 2 \cdot \pi \cdot 4 = 8\pi \;. \end{aligned}$$

d) Seja,

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + z^2 = 4,\; y = 4\right\} \;.$$

Determine, usando os resultados das alíneas anteriores, $\int_C F \cdot dg$, onde o caminho g percorre C no sentido horário para um observador no ponto $(0,10,0)$.

Resolução As curvas C e Γ coincidem mas são percorridas em sentidos opostos pelo que, da alínea b), obtemos

$$\int_C F \cdot dg = -\int_\Gamma F \cdot dh = -8\pi.$$