Análise Matemática III
1º semestre de 2006/2007

Exercício teste 11 (a entregar na aula prática da semana de 04/12/2006)

Considere a variedade

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2,\ y > 0,\ z > 0\}$$

e o campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-x, y - 1, z).$$

Calcule o fluxo $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ no sentido da normal n que tem a terceira componente negativa,

a) usando a definição de fluxo;

b) usando o teorema da divergência.

Resolução

1. Uma parametrização para S é dada por $g(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$, com $(x, y) \in B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1,\ y > 0\}$.

   Temos

$$D_1\, g \times D_2\, g = \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = (2x, 2y, 1).$$

   Note que a 3ª componente deste vector é sempre positiva, pelo que ele tem o sentido contrário ao pretendido. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS &= -\iint_B \mathbf{F}(g(x, y)) \cdot (D_1\, g \times D_2\, g)\, dx\, dy \\
&= -\iint_B \mathbf{F}(x, y, 1 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, 1) \quad dx\, dy \\
&= -\iint_B (-x, y - 1, 1 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, 1) \quad dx\, dy = \\
&= -\iint_B 1 - 3x^2 + y^2 - 2y\ dx\, dy \\
&= -\int_0^\pi \int_0^1 r(1 - 3r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta - 2r \sin\theta)\, dr\, d\theta \\
&= -\int_0^\pi \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\cos^2\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta - \frac{2}{3}\sin\theta\, d\theta \\
&= -\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{8} + \frac{4}{3} = \frac{4}{3} - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Note que no cálculo deste integral utilizámos uma mudança de coordenadas para coordenadas polares.

Alternativamente, poderíamos utilizar uma parametrização para S dada por

$$g(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 1-\rho^2),$$

com $\rho \in]0,1[$ e $\theta \in]0,\pi[$. Assim, teríamos

$$D_1\, g \times D_2\, g = \frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ \cos\theta & \sin\theta & -2\rho \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (2\rho^2\cos\theta, 2\rho^2\sin\theta, \rho).$$

Note que a 3ª componente deste vector é também sempre positiva, pelo que tem novamente o sentido contrário ao pretendido. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\; dS &= -\int_0^{\pi}\int_0^1 \mathbf{F}(g(\rho,\theta))\cdot(D_1\, g\times D_2\, g)\, d\rho\, d\theta \\
&= -\int_0^{\pi}\int_0^1 (-\rho\cos\theta, \rho\sin\theta - 1, 1-\rho^2)\ \cdot\ (2\rho^2\cos\theta, 2\rho^2\sin\theta, \rho)\ \ d\rho\, d\theta = \\
&= -\int_0^{\pi}\int_0^1 -2\rho^3\cos^2\theta + 2\rho^3\sin^2\theta - 2\rho^2\sin\theta + \rho - \rho^3\, d\rho\, d\theta = \frac{4}{3} - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

2. F é um campo vectorial de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ pelo que podemos aplicar o teorema da divergência na região

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z < 1 - x^2 - y^2,\ y > 0,\ z > 0\}.$$

A fronteira de D é formada por S e pelas superfícies

$$B_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ y > 0,\ z = 0\}$$

e

$$B_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - x^2,\ y = 0\}.$$

O teorema da divergência diz então que

$$\begin{aligned}
&\iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\ dxdydz = \int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_{\text{ext}}\ dS \\
= \ &\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_{\text{ext}}\ dS + \int_{B_1} \mathbf{F}\cdot(0,0,-1)\ dS + \int_{B_2} \mathbf{F}\cdot(0,-1,0)\ dS
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{n}_{\text{ext}}$ é a normal unitária exterior a D em S, $(0,0,-1)$ é a normal unitária exterior a D em B_1 e $(0,-1,0)$ é a normal unitária exterior a D em B_2 .

Como $\operatorname{div}\mathbf{F} = 1$ temos

$$\begin{aligned}
\iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\ dxdydz &= \iiint_D 1\ dxdydz = \int_0^{\pi}\int_0^1\int_0^{1-\rho^2} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta \\
&= \pi\int_0^1 \rho(1-\rho^2)\, d\rho = \frac{\pi}{4},
\end{aligned}$$

onde utilizámos uma mudança de coordenadas para coordenadas cilíndricas.
Por outro lado,

$$\int_{B_1} \mathbf{F} \cdot (0,0,-1)\ dS = \int_{B_1} -z\, dS = 0$$

pois $z = 0$ em B_1, enquanto que

$$\int_{B_2} \mathbf{F}\cdot(0,-1,0)\, dS = -\int_{B_2} y-1\, dS = \int_{B_2} 1\, dS = \text{área}(B_2) = \int_{-1}^{1} 1-x^2\, dx = \frac{4}{3}.$$

Nota: Esta área poderia também ser calculada utilizando a parametrização $g(x,z) = (x,0,z)$, para $(x,z) \in R = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : 0 < z < 1-x^2\}$. Com efeito, teríamos

$$D_1\, g \times D_2\, g = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0,-1,0),$$

pelo que $||D_1\, g \times D_2 g|| = 1$ e então

$$\text{área}(B_2) = \iint_R ||D_1\, g \times D_2 g||\, dx\, dz = \int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2} 1\, dz\, dx = \frac{4}{3}.$$

Concluímos assim que

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_{\text{ext}}\ dS &= \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\, dx\, dy\, dz - \int_{B_1} \mathbf{F}\cdot(0,0,-1)\ dS - \int_{B_2} \mathbf{F}\cdot(0,-1,0)\, dS \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{4}{3},\end{aligned}$$

e então

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = -\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_{\text{ext}}\, dS = \frac{4}{3} - \frac{\pi}{4}.$$