Análise Matemática III
Exercícios

Teorema fundamental do cálculo para integrais de linha e Teorema de Green.

1 Indique quais dos seguintes conjuntos são conexos por arcos e quais são conjuntos em estrela.

a) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

b) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1 \text{ e } (x-3)^2 + y^2 > 1\}$

c) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \text{ ou } (x-3)^2 + y^2 < 1\}$

d) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2\}$

e) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 1 + z^2\}$

f) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq 0\}$

g) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$

h) $S = \{x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + w^2 < 1\}$

2 Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $F(x,y) = (x,y)$ sobre uma partícula que se move entre os pontos $(0,0)$ e $(1,1)$ ao longo de

a) Um segmento de recta.

b) Um arco da curva $y = x^3$.

O campo de forças é conservativo?

3 Um campo de forças em $\mathbb{R}^3$ é definido pela equação

$$F(x,y,z) = y^2\mathbf{i} + (2xy + z)\mathbf{j} + (y+5)\mathbf{k}$$

a) Determine se F é ou não conservativo.

b) Calcule o trabalho realizado pela força F sobre uma partícula cuja trajectória é descrita por

$$\alpha(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$$

com t a variar entre 0 e π.

4 Determine se os campos de forças dados pelas expressões seguintes são ou não conservativos. Em caso afirmativo determine uma função potencial e caso contrário determine uma curva fechada C tal que

$$\oint_C F \neq 0$$

a) $F(x,y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$

b) $F(x,y) = (2x \operatorname{sen}(x+y^2) + x^2\cos(x+y^2))\mathbf{i} + 2x^2 y \cos(x+y^2)\mathbf{j}$

c) $F(x,y,z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + x\mathbf{k}$

d) $F(x,y,z) = (y^2\cos x + z^3)\mathbf{i} - (4 - 2y \operatorname{sen} x)\mathbf{j} + (3xz^2 + 2)\mathbf{k}$

e) $F(x,y,z) = xy\mathbf{i} + (x^2+1)\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

f) $F(x,y,z) = (4xy - 3x^2z^2 + 1)\mathbf{i} + 2(x^2 + 1 - yz)\mathbf{j} - (2x^3z + 3z^2 + y^2)\mathbf{k}$

5 Seja $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $F(x,y) = (x^2 + y^2, \alpha xy)$ com $\alpha \in \mathbb{R}$, e considere a curva $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $g(t) = (t, e^{t^2} - 1)$.

a) Calcule o valor de α para o qual F é um gradiante em $\mathbb{R}^2$.

b) Calcule o trabalho do campo F realizado ao longo do caminho g com o valor de α determinado na alínea anterior.

6 Seja $F(x,y) = (-\frac{x}{\sqrt{y-x^2}}, \frac{1}{2\sqrt{y-x^2}})$.

a) O campo F é gradiante no seu domínio de definição. Justifique esta afirmação.

b) Calcule a função potencial $\varphi(x,y)$ de F que satisfaz $\varphi(0,1) = 2$.

7 Considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$F(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$$

a) Mostre que F é fechado.

b) Calcule o integral $\oint_C F$ onde C é a círcunferência de raio 1 centrada na origem percorrida no sentido directo.

c) O campo F é gradiante?

d) Dê uma expressão para o ângulo $\theta(x,y) \in]-\pi, \pi[$ das coordenadas polares no conjunto $R^2 - \{(x,0) : x \leq 0\}$ e mostre que θ é uma função potencial para F neste conjunto.

8 Considere o campo vectorial

$$F(x,y) = (-\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{y}{(x-1)^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2})$$

Calcule o integral de linha de F ao longo do caminho fronteiro a um losango, que une os pontos $(2,0)$, $(0,-2)$, $(-2,0)$, $(0,2)$ percorrido no sentido horário.

9 Seja $r = \sqrt{x^2+y^2}$ e considere o campo vectorial definido para $r \neq 0, 1$ dado por

$$F(x,y) = (\frac{x}{r(1-r)}, \frac{y}{r(1-r)})$$

Decida se o campo F é um gradiante em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1\}$. Em caso afirmativo, aproveite para calcular um integral de linha

$$\int_L F$$

onde L é uma linha seccionalmente C^1 com início em $(0,2)$ e fim em $(1,1)$ cuja distância à origem é maior do que 1.

10 Um fluido flui no plano xy menos a origem. Cada partícula afasta-se da origem em linha recta de tal forma que, quando uma partícula está à distância r da origem, a sua velocidade é de ar^n onde a e n são constantes.

a) Determine para que valores de a e de n o campo vectorial das velocidades é um campo gradiante.

b) Para cada um dos valores anteriores, calcule uma função potencial (note que o caso $n = -1$ é especial).

11 Um campo de forças *radial* (ou central) é um campo de forças $F : \mathbb{R}^3 - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que pode ser descrito por uma expressão da forma

$$F(x, y, z) = f(r)\mathbf{r}$$

onde $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é a distância à origem e

$$\mathbf{r} = \frac{1}{r}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

Mostre que um campo de forças radial é conservativo.

12 Mostre que se S é um conjunto de R^n conexo por arcos e φ e ψ são duas funções potencial para o campo vectorial $F : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ então $\varphi - \psi$ é constante em S.

13 Calcule, utilizando o Teorema de Green, o integral

$$\oint_C y^2 dx + x dy$$

onde C é o círculo de raio 2 e centro na origem percorrido no sentido directo.

14 Calcule o integral de linha

$$\oint_C x e^{-y^2} dx + (-x^2 y e^{-y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2}) dy$$

onde C é a fronteira do quadrado definido pelas equações $|x| \leq a$ e $|y| \leq a$ percorrida no sentido dos ponteiros do relógio.

15 Se f e g são campos escalares de classe C^1 num subconjunto S de $\mathbb{R}^2$ aberto e conexo por arcos, mostre que

$$\oint_C f \nabla g = -\oint_C g \nabla f$$

para toda a curva C contida em S e representada por um caminho fechado, regular, e simples.

16 Calcule todos os valores possíveis do integral

$$\oint_C \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

onde C é uma curva regular fechada simples em $R^2 - \{0\}$.

17 Seja F um campo vectorial de classe C^1, fechado e defido em $S = \mathbb{R}^2 - \{P_1, P_2, P_3\}$ onde P_i são pontos do plano. Sejam C_1, C_2 e C_3 circunferências centradas em cada um destes pontos, percorridas no sentido directo e tais que C_i contem apenas o ponto P_i. Suponha que

$$\oint_{C_i} F = I_i$$

onde $I_1 = 12$, $I_2 = 9$, $I_3 = 15$.

a) Calcule todos os valores possíveis de $\oint_C F$ para C uma curva percorrida por um caminho regular fechado e simples que não passe por nenhum dos pontos P_i.

b) Mostre que não existe nenhuma curva fechada[1] regular C contida em S para a qual se tenha

$$\oint_C F = 1$$

[1]Não necessáriamente simples