Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Exercícios Propostos
Teorema da Divergência. Teorema de Stokes

1 Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo do campo $f(x, y, z) = (x, 0, 0)$ através da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y^2 + z^2 = x \,;\, 1 < x < 2\},$$

no sentido da normal unitária com primeira componente negativa.

2 Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = -2(x^2 + y^2) \,;\, -2 < z \leq 0\}.$$

Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo do campo $f(x, y, z) = (x, y, z)$ através de S segundo a normal cuja terceira componente é negativa.

3 Considere o campo vectorial $f(x, y, z) = (xg(z), -yg(z), z)$, em que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1.

Fixe uma normal ao cilindro

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 4 \,;\, 0 < z < 1\}$$

e use o Teorema da Divergência para mostrar que o fluxo de f através de S, segundo essa normal, não depende da função g.

4 Considere o cilindro

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 2 \,;\, 0 < z < 2\}.$$

Use o Teorema de Stokes par calcular o fluxo do campo $f(x, y, z) = (x, y, -2z)$ através de C no sentido da normal ν tal que $\nu(\sqrt{2}, 0, 1) = (1, 0, 0)$.

5 Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \,;\, -1 < z\},$$

e o campo vectorial $f(x, y, z) = (y, -x, \arctan(xyz))$.

a) Usando o Teorema de Stokes, calcule o fluxo do rotacional de f através de S no sentido na normal ν tal que $\nu(0, 0, \sqrt{2}) = (0, 0, 1)$.

b) Use o resultado da alínea anterior para calcular o fluxo do rotacional de f através do disco

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = -1 \,;\, x^2 + y^2 \leq 1\},$$

no sentido da normal cuja terceira componente é negativa.

6 Considere a linha

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2 + y^2 \,;\, 2y + z = 3\}$$

e o campo vectorial $f(x, y, z) = \left(-2y, 2x, 3z^2\right)$.

Use o teorema de Stokes para calcular o trabalho realizado pelo campo f ao longo da linha C, percorrida uma vez no sentido positivo quando vista da origem.

7 Considere a superfície

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \,;\, z > 0\right\}$$

e o campo vectorial $F(x, y, z) = (-y, x, 1)$.

Calcule o fluxo de F através de M no sentido da normal com terceira componente positiva, usando:

a) O Teorema da Divergência.

b) O Teorema de Stokes.