Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Exercícios Propostos

Integrabilidade. Teoremas de Convergência. Regra de Leibniz

1 Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função em escada. Prove que ϕ é contínua num ponto $x \in \mathbb{R}$ se e só se existe um intervalo aberto $I(x)$, contendo x, tal que ϕ é constante em $I(x)$.

2 Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Prove que se a derivada de F é uma função em escada, então F é constante.

3 Sabendo que χ_S é a função característica do conjunto S, mostre que cada uma das funções seguintes é limite superior:

a) $f = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \chi_{[k,\ k+1)}$

b) $f = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \chi_{[2^k,\ 2^k+2^{-2k}]}$

4 Prove que a função $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ é integrável no intervalo $[1,\ +\infty[$ e calcule o respectivo integral.

5 Sendo $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$, calcule o integral

$$\int_B \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\, dxdy.$$

6 Considere o conjunto

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2y^2 < 1,\ x > 1,\ 0 < y < 1\}$$

e, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, a função $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f_\alpha(x,y) = x^\alpha.$$

a) Determine os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais f_α é integrável em S.

b) Para cada α, determinado na alínea anterior, calcule $\displaystyle\int_S f_\alpha$.

7 Calcule os limites seguintes:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{r^n}{1+r^{n+2}}\, dr.$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sqrt[n]{x}}{1+x^2}\, dx.$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \cos^n(x)\, dx.$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)^n}\, dxdy.$

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1+\cos^n(x-y)}{(x^2+y^2+1)^2}\, dxdy.$

8 Considere a função

$$f(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(x) e^{-tx^2}\, dx,$$

em que $t > 0$. Prove que f é diferenciável e escreva uma expressão para a derivada $f'(t)$.

9 Considere a função

$$f(t) = \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}(tx)}{x}\, dx,$$

definida para $t > 0$.

a) Mostre que f é diferenciável.

b) Calcule $f'(t)$.

10 Mostre que, para $t > 0$, se tem

$$\log t = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x}\, dx.$$