

Exercícios Propostos

Mudança de Coordenadas

1 Considere o conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1; -y \leq x \leq y\}$.

a) Calcule $\int_S \cos(x^2 + y^2) dx dy$.

b) Determine as coordenadas do centróide de S .

2 Use uma mudança de coordenadas linear apropriada para calcular o integral

$$\int_S (x - y)^2 \sin^2(x + y) dx dy,$$

onde S é o paralelogramo com vértices nos pontos $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ e $(0, \pi)$.

3 Considere a função $g(u, v) = (u + v, v - u^2)$, definida em

$$W = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > -\frac{1}{2}\}.$$

a) Mostre que g é uma mudança de coordenadas.

b) Calcule o integral $\int_S \frac{1}{(x - y + 1)^2} dx dy$, em que $S = g(T)$, e T é o quadrado com vértices nos pontos $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$.

4 Use uma mudança de coordenadas apropriada para calcular o integral

$$\int_A x e^{-y+x^2} dx dy,$$

em que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq x^2; -1 \leq x \leq 1\}$.

5 Calcule o integral

$$\int_S \frac{1}{(1 + z^2)^2} dx dy dz,$$

em que

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2 + 1; x \geq 0; y \geq 0; 0 \leq z \leq 1\}.$$

6 Considere o conjunto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq \sqrt{z^2 + y^2}; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

a) Determine o centróide de V usando coordenadas cilíndricas.

b) Usando coordenadas esféricas, calcule o momento de inércia de V relativo ao eixo Oz , sabendo que V representa um sólido homogêneo com densidade igual a um.

7 Calcule o volume de cada um dos conjuntos seguintes:

a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1; x^2 + y^2 + z^2 > 1; 0 < z < 1\}$.

b) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 4)^2 + z^2 < 1; z > 0\}$.