Análise Matemática III

Exercícios

Funções em escada

1 Recorde que para $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ designa o maior inteiro n tal que $n \leq x$ e que se S é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, a função característica de S, χ_S é definida por

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in S \\ 0 & \text{se } x \notin S \end{cases}$$

Diga se as seguintes funções são funções em escada e em caso afirmativo calcule o seu integral.

a) $f = \chi_{[1,\infty)} + \chi_{(-\infty,-1)}$

b) $f = \chi_{[0,\infty)} - \chi_{(1,+\infty)}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\,, & \text{se } x \in \mathbb{N} \\ 0\,, & \text{caso contrário} \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x\,, & \text{se } \frac{1}{x} \in \mathbb{N} \\ 0\,, & \text{caso contrário} \end{cases}$

e) $f = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \chi_{(0,\frac{1}{k})}$

f) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ -3 & \text{se } \frac{1}{2} < x < 1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ 2 & \text{se } 0 \leq x < 1,\ \frac{1}{2} < y < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

g) $[x]\chi_{[-100,100]}(x)$

h) $f(x,y) = ([x] + [y])\chi_{[0,2]\times[0,2]}(x,y)$

i) $\left(\left[\frac{3}{1+x}\right] \chi_{(0,2)}(y) - \left[\frac{2}{1+y}\right] \chi_{(0,3)}(x)\right) \chi_{(0,\infty)\times(0,\infty)}(x,y)$

2 Calcule o integral da seguinte função em escada:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} -\frac{1}{3} & \text{se } 0 \leq x \leq 1,\ 1 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen}(x) & \text{se } y = \frac{1}{3},\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1 \\ 2 & \text{se } -1 \leq x \leq -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2},\ 2 \leq z \leq 3 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

3 Seja ϕ uma função em escada. Prove que ϕ é contínua no ponto x se e só se existe um intervalo aberto $I(x)$ contendo x tal que ϕ é constante em $I(x)$.

4 Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Prove que se a derivada de F é uma função em escada, então F é constante.