

**Análise Matemática III**  
**1º semestre de 2006/2007**  
**2º Teste - 16 de Dezembro de 2006**

**Resolução**

1. Considere o conjunto:

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 2xz + 2y^2 - z^3 = 0; y > 0; 1 < z < 3\},$$

- a) Mostre que  $M$  é uma variedade e determine a sua dimensão. (2.5 val.)
- b) Determine o espaço normal e o espaço tangente a  $M$  no ponto  $(0, 2, 2)$ . (3 val.)
- c) Justifique porque a equação  $x^2 - 2xz + 2y^2 - z^3 = 0$  determina  $z$  implicitamente como função de classe  $C^1$  de  $x$  e  $y$  numa vizinhança do ponto  $(0, 2, 2)$ , e calcule a derivada parcial  $\frac{\partial z}{\partial y}(0, 2)$ . (2.5 val.)

**Resolução**

- (a)  $M$  é o conjunto de nível 0 da função  $F(x, y, z) = x^2 - 2xz + 2y^2 - z^3$ , de classe  $C^1$ . A matriz derivada de  $F$  é dada por:

$$DF(x, y, z) = [2(x - z), 4y, -2x - 3z^2].$$

Temos:

$$DF(x, y, z) \neq (0, 0, 0) \quad \forall (x, y, z) \in M$$

porque  $4y > 0, \forall (x, y, z) \in M$ , ou porque  $DF(x, y, z) = (0, 0, 0)$  implica  $(x = z) \wedge (y = 0) \wedge (-2x - 3z^2 = 0)$ , ou seja  $(z = 0) \vee (z = -2/3)$ , portanto  $(x, y, z) \notin M$ . Conclui-se que  $M$  é uma variedade, e que a sua dimensão é  $3 - \text{car}DF = 3 - 1 = 2$ .

- (b) Os vectores normais a  $M$  no ponto  $(0, 2, 2)$  são gerados por  $DF(0, 2, 2) = (-4, 8, -12)$ . Portanto o espaço normal a  $M$  é dado por:

$$T_{(0,2,2)}M^\perp = \{c(-1, 2, -3) : c \in \mathbb{R}\}.$$

Os vectores tangentes a  $M$  no ponto  $(0, 2, 2)$  são perpendiculares ao vector  $(-1, 2, -3)$ , portanto são soluções da equação  $-a + 2b - 3c = 0$ . Assim

$$T_{(0,2,2)}M = \{b(2, 1, 0) + c(-3, 0, 1) : b, c \in \mathbb{R}\}.$$

- (c) A função  $F(x, y, z) = x^2 - 2xz + 2y^2 - z^3$  é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^3$ , e verifica  $F(0, 2, 2) = 0, \frac{\partial F}{\partial z}(0, 2, 2) = -12 \neq 0$ . Pelo Teorema da Função Implícita, existe uma vizinhança de  $(0, 2, 2)$ , onde a equação  $F(x, y, z) = 0$  determina  $z$  implicitamente como função de classe  $C^1$  de  $x$  e  $y$ . Temos ainda:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0, 2) = - \frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z} \Big|_{(0,2,2)} = - \frac{8}{-12} = 2/3.$$

2. Considere o campo vectorial  $F(x, y, z) = (x, y, z + 1)$  e a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1, x, y, z > 0\}.$$

Calcule o fluxo de  $F$  através de  $S$  no sentido da normal com terceira componente negativa.

(a) pela definição de fluxo; (3 val.)

(b) usando o teorema da divergência; (3 val.)

### Resolução

(a) Consideremos a parametrização de  $S$  definida por:

$$g(x, y) = (x, y, 1 - x - y),$$

com

$$(x, y) \in T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1 - x, 0 < x < 1\}.$$

A sua matriz Jacobiana é dada por

$$Dg(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vemos que

$$D_x g \times D_y g = (1, 1, 1)$$

tem o sentido contrário ao pretendido, pois a sua terceira componente é positiva. Assim,

$$F(g(x, y)) \cdot (D_x g \times D_y g) = (x, y, 2 - x - y) \cdot (1, 1, 1) = 2$$

pelo que o fluxo é dado por

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot \nu \, dS &= - \iint_T F(g(x, y)) \cdot (1, 1, 1) \, dx \, dy \\ &= - \iint_T 2 \, dx \, dy = -2 \text{área}(T) = -2 \times \frac{1}{2} = -1 \end{aligned}$$

Alternativamente, vemos facilmente pela equação do plano  $x + y + z = 1$  que a normal unitária do enunciado é  $\nu = -\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot \nu \, dS &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \int_S (x, y, z + 1) \cdot (1, 1, 1) \, dS \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \int_S x + y + z + 1 \, dS = -\frac{1}{\sqrt{3}} \int_S 2 \, dS \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \int_S 1 \, dS = -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_T \|D_x g \times D_y g\| \, dx \, dy \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3} \times \text{área}(T) = -1. \end{aligned}$$

(b) Temos  $\operatorname{div} F = 1 + 1 + 1 = 3$ . Seja  $D$  a região

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1 - x - y, x, y > 0\}$$

e  $B_1, B_2$  e  $B_3$  as regiões

$$B_1 : = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, 0 \leq y \leq 1 - x\},$$

$$B_2 : = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, 0 \leq z \leq 1 - y\},$$

$$B_3 : = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, 0 \leq z \leq 1 - x\}.$$

Sejam  $n_{B_1} = (0, 0, -1)$ ,  $n_{B_2} = (-1, 0, 0)$ ,  $n_{B_3} = (0, -1, 0)$  as normais unitárias a  $B_1, B_2$  e  $B_3$ , respectivamente, exteriores ao sólido  $D$  (note que  $\partial D = S \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3$ ). Pelo Teorema da Divergência temos,

$$\iiint_D \operatorname{div} F = \int_S F \cdot n_{\text{ext}} + \int_{B_1} F \cdot n_{B_1} + \int_{B_2} F \cdot n_{B_2} + \int_{B_3} F \cdot n_{B_3}.$$

Como

\*

$$\begin{aligned} \iiint_D \operatorname{div} F &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 3 \, dz \, dy \, dx \\ &= 3 \int_0^1 \int_0^{1-x} 1 - x - y \, dy \, dx = \\ &= 3 \int_0^1 \left[ (1-x)y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 (1-x)^2 dx = -\frac{1}{2} [(1-x)^3]_0^1 = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

\*  $n_{B_1} = (0, 0, -1)$  e  $F \cdot n_{B_1} = -(z+1) = -1$  em  $B_1$ , pelo que

$$\int_{B_1} F \cdot n_{B_1} = -(\text{área } B_1) = -\frac{1}{2},$$

\*  $n_{B_2} = (-1, 0, 0)$  e  $F \cdot n_{B_2} = -x = 0$  em  $B_2$ , pelo que

$$\int_{B_2} F \cdot n_{B_2} = 0,$$

\*  $n_{B_3} = (0, -1, 0)$  e  $F \cdot n_{B_3} = -y = 0$  em  $B_3$ , pelo que

$$\int_{B_3} F \cdot n_{B_3} = 0,$$

obtemos

$$\int_S F \cdot n_{\text{ext}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Note-se que este fluxo é segundo a normal exterior a  $D$  e que o fluxo pedido é segundo a normal interior, pelo que o resultado deverá ser  $-1$ , como o obtido na alínea (a).

3. Utilizando o teorema de Stokes calcule o fluxo do campo

$$H(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$$

através da superfície

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, y > 0, z < 4\},$$

no sentido da normal com terceira componente positiva.

(3 val.)

### Resolução

O campo  $H$  é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^3$  e tem divergência nula

$$\operatorname{div} H = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Uma vez que  $\mathbb{R}^3$  é um conjunto em estrela concluímos que  $H$  é um campo rotacional, i.e., tem um potencial vector,  $A$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} A &= H \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = H_1 = y + z \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = H_2 = x + z \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = H_3 = x + y \end{cases} \end{aligned}$$

Escolhendo  $A_1 = 0$ ,

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = y + z \\ -\frac{\partial A_3}{\partial x} = x + z \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = y + z \\ A_3 = -\frac{x^2}{2} - zx + c_3(y, z) \\ A_2 = \frac{x^2}{2} + xy + c_2(y, z). \end{cases}$$

Substituindo  $A_2$  e  $A_3$  na primeira equação,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{x^2}{2} - zx + c_3 \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{x^2}{2} + xy + c_2 \right) &= y + z \Leftrightarrow \\ \frac{\partial c_3}{\partial y} - \frac{\partial c_2}{\partial z} &= y + z. \end{aligned}$$

Escolhendo  $c_3 = 0$  obtemos

$$c_2 = -yz - \frac{z^2}{2} + k,$$

pelo que um potencial vector de  $H$  é dado por

$$A = \left( 0, \frac{x^2}{2} + xy - yz - \frac{z^2}{2}, -\frac{x^2}{2} - zx \right).$$

Pelo teorema de Stokes temos então

$$\iint_L H \cdot n_L \, dS = \iint_L \operatorname{rot} A \cdot n_L \, dS = \int_C A \cdot dg,$$

onde  $C = \partial L = C_1 \cup C_2$ , com  $C_1$  um arco de uma parábola no plano  $xOz$

$$C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, z = x^2, z < 4\},$$

e  $C_2$  uma semi-circunferência,

$$C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4, x^2 + y^2 = 4, y \geq 0\}.$$

Usando  $x$  como parâmetro na curva  $C_1$ ,

$$g_1(x) = (x, 0, x^2), \quad -2 < x < 2,$$

e tendo em conta que o sentido induzido por  $n_L$  em  $C$  é o sentido horário para um observador no ponto  $(0, 50, 0)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{C_1} A \cdot dg_1 &= \int_{-2}^2 \left( 0, \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2}, -\frac{x^2}{2} - x^3 \right) \cdot (1, 0, 2x) \, dx = \\ &= - \int_{-2}^2 (x^3 + 2x^4) \, dx = -\frac{2}{5} x^5 \Big|_{-2}^2 = -\frac{128}{5}. \end{aligned}$$

Para  $C_2$ , usando a representação paramétrica,

$$g_2(\theta) = (2 \cos(\theta), 2 \sin(\theta), 4), \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

temos

$$\begin{aligned} \int_{C_2} A \cdot dg_2 &= \\ &= \int_0^\pi (0, 2 \cos^2(\theta) + 4 \cos(\theta) \sin(\theta) - 8 \sin(\theta) - 8, -2 \cos^2(\theta) - 8 \cos(\theta)) \cdot \\ &\quad \cdot (-2 \sin(\theta), 2 \cos(\theta), 0) \, d\theta = \\ &= \int_0^\pi (4 \cos^3(\theta) + 8 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - 16 \sin(\theta) \cos(\theta) - 16 \cos(\theta)) \, d\theta \\ &= \left[ 4 \sin(\theta) - \frac{4}{3} \sin^3(\theta) - \frac{8}{3} \cos^3(\theta) + 4 \cos(2\theta) - 16 \sin(\theta) \right]_0^\pi = \\ &= \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Concluimos então que

$$\iint_L H \cdot n_L \, dS = \int_{C_1} A \cdot dg_1 + \int_{C_2} A \cdot dg_2 = -\frac{128}{5} + \frac{16}{3} = -\frac{304}{15}.$$

4. Seja  $S$  a superfície em  $\mathbb{R}^4$ :

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : z = f_1(x, y); t = f_2(x, y); (x, y) \in T\},$$

onde  $f_1, f_2$  são funções de classe  $C^1$  em  $T$ , e  $T$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ .

- a) Obtenha uma fórmula geral para a área de  $S$  (ou seja para  $\int_S 1$ , pressupondo que esse integral é finito) na forma de um integral duplo envolvendo as derivadas parciais de  $f_1$  e  $f_2$ . (1.5 val.)
- b) Calcule a área da superfície  $S$  dada por: (1.5 val.)

$$z = x + 2y, \quad t = -x + y, \quad 0 < x, y < 1.$$

### Resolução

- (a) A superfície  $S$  é parametrizada pela função:

$$g(x, y) = (x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)), \quad (x, y) \in T,$$

cuja matriz derivada é:

$$Dg(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Obtemos assim uma expressão para o factor  $\sqrt{\det(Dg^t Dg)}$  no integral:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\det(Dg^t(x, y) Dg(x, y))} \\ &= \sqrt{\det \begin{bmatrix} 1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial y} & 1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 \end{bmatrix}}. \end{aligned}$$

Depois de alguma simplificação, obtemos:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2}.$$

Assim uma fórmula geral para a área de  $S$  é:

$$\iint_T \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

- (b) Aplicando a fórmula na alínea anterior, a área é dada por:

$$\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{17} dx dy = \sqrt{17}.$$