Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TODOS OS CURSOS EXCEPTO LEC, LET, LCI, LEA, LEBM, LEFT E LMAC

TESTE 1 – 8 DE NOVEMBRO DE 2003

duração: hora e meia (9:00-10:30)

(1) Considere a seguinte região de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le x \le 1 \,,\, 0 \le y \le 1 \,,\, 0 \le z \le y^2+1\} \,.$$

(a) Calcule o integral $\iiint_S x^2 y$.

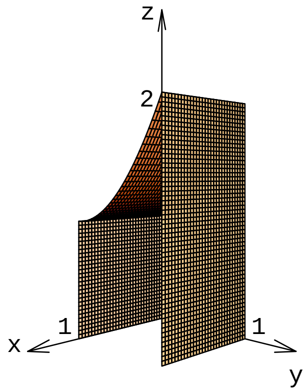
[Resolução]
Da definição de S vemos que

$$\begin{aligned}
\iiint_S x^2 y &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{y^2+1} x^2 y \; dzdxdy = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 x^2 y \, [z]_{z=0}^{z=y^2+1} \, dxdy = \int_0^1 \int_0^1 x^2 y (y^2+1) dxdy = \\
&= \int_0^1 (y^3+y) \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} dy = \frac{1}{3}\int_0^1 (y^3+y) dy = \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{y^4}{4}+\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

(b) Dada uma função integrável, f, em S escreva uma expressão para $\iiint_S f$ da forma

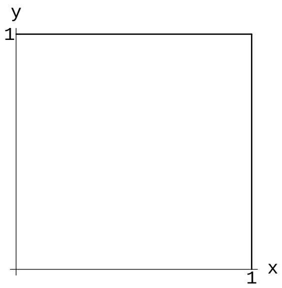
$$\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} f \, dx \right) dy \right) dz \,.$$

[Resolução]
Da figura



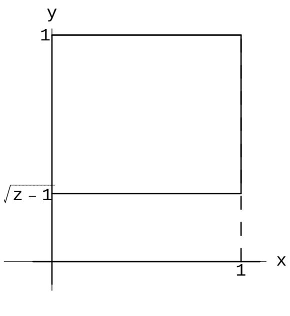
vemos que z toma o seu valor máximo quando y é máximo, pelo que os limites de variação de z são, $0 \leq z \leq 2$. Da figura e da condição $y^2 \geq z - 1$, vemos que ha' dois tipos de cortes com planos perpendiculares ao eixo Oz.

$0 \leq z \leq 1$: Neste caso o corte com um plano $z = \mathrm{const}$ (a sua projecção no plano Oxy) não depende do valor de z neste intervalo e é dado pelo quadrado



$$B_z = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 1; \ 0 \leq y \leq 1\right\}.$$

$1 \leq z \leq 2$**:** Agora o corte já depende do valor de z e é dado por



$$B_z = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1; \ \sqrt{z-1} \le y \le 1\right\}.$$

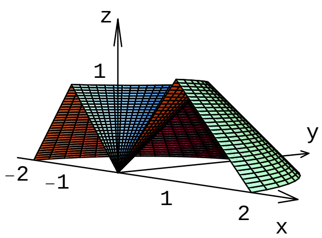
Concluímos então que, na ordem de integração pedida,

$$\iiint_S f = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f \ dxdydz + \int_1^2 \int_{\sqrt{z-1}}^1 \int_0^1 f \ dxdydz.$$

(2) Calcule o volume do sólido com a forma da região

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \le z \le 2 - \sqrt{x^2+y^2} \ ; \ z \le \sqrt{x^2+y^2} \ ; \ y \ge 0\}.$$

[Resolução]
O sólido B



tem simetria de rotação em torno do eixo z pelo que é conveniente usar coordenadas cilíndricas

$$g \ : \ \begin{cases} x &= \rho\cos(\theta) \\ y &= \rho\,\mathrm{sen}(\theta) \\ z &= z \end{cases}.$$

O módulo do Jacobiano é $|\det(Dg)| = \rho$ e a imagem inversa de $\widetilde{B} = B \setminus \{(x,0,z) \ : \ x \ge 0, \ z \in \mathbb{R}\}$ é

$$g^{-1}(\widetilde{B}) = \left\{(\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \le z \le 2-\rho; \ z \le \rho; \ 0 < \theta \le \pi; \ \rho > 0\right\}.$$

O valor máximo de z corresponde à intersecção de $z = \rho$ com $z = 2-\rho$ pelo que, $z_{max} = 1$. Temos então,

$$\begin{aligned} Vol(B) &= \int_B 1 = \int_{g^{-1}(\widetilde{B})} \rho = \int_0^\pi \int_0^1 \int_z^{2-z} \rho \ d\rho dz d\theta = \\ &= \pi \int_0^1 \frac{1}{2}\left[\rho^2\right]_{\rho=z}^{\rho=2-z} dz = \frac{\pi}{2}\int_0^1 (4-4z+z^2-z^2)dz = \\ &= \frac{\pi}{2}\left[4z-2z^2\right]_0^1 = \pi. \end{aligned}$$

Alternativamente: Integrando primeiro em ordem a z e depois em ordem a ρ, $0 < \rho \le 2$, temos de dividir $g^{-1}(\widetilde{B})$ em duas regiões

$$\begin{aligned} 0 < \rho \le 1 &\ \Rightarrow \ 0 \le z \le \rho \\ 1 < \rho \le 2 &\ \Rightarrow \ 0 \le z \le 2-\rho, \end{aligned}$$

e portanto, nesta ordem de integração, temos

$$\begin{aligned} Vol(B) &= \int_B 1 = \int_{g^{-1}(\widetilde{B})} \rho = \int_0^{\pi}\int_0^1\int_0^{\rho} \rho\ dzd\rho d\theta + \int_0^{\pi}\int_1^2\int_0^{2-\rho} \rho\ dzd\rho d\theta = \\ &= \pi\int_0^1 \rho\,[z]_{z=0}^{z=\rho}\,d\rho + \pi\int_1^2 \rho\,[z]_{z=0}^{z=2-\rho}\,d\rho = \\ &= \pi\int_0^1 \rho^2 d\rho + \pi\int_1^2 \left(2\rho-\rho^2\right)d\rho = \pi\left(\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 + \left[\rho^2 - \frac{\rho^3}{3}\right]_1^2\right) = \\ &= \pi\left(\frac{1}{3} + 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3}\right) = \pi. \end{aligned}$$

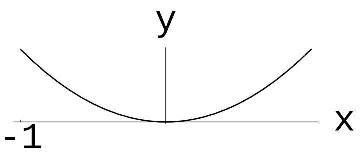
(3) Um fio dado por

$$C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y = \frac{x^2}{2}\ ;\ |x|<1\}$$

tem densidade de massa $\sigma = \sqrt{1+x^2}$. Determine a massa M e a coordenada y_{CM} do centro de massa. Diga, justificando mas sem fazer cálculos, qual o valor de x_{CM}.

[Resolução]

- Um parâmetro natural para o fio C



é a coordenada x dos seus pontos,

$$g(x) = (x, \frac{x^2}{2})\ ;\ |x|\le 1.$$

O vector velocidade em ordem ao parâmetro é $g'(x) = (1,x)$ e a sua norma, $||g'(x)|| = \sqrt{1+x^2}$. Como $\sigma(g(x)) = \sqrt{1+x^2}$, a massa da linha é

$$\begin{aligned} M &= \int_C \sigma = \int_{-1}^1 \sigma(g(x))\ ||g'(x)||dx \\ &= \int_{-1}^1 (1+x^2)dx = \left[x + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

- Para a coordenada y_{CM} do centro de massa de C temos

$$\begin{aligned} y_{CM} &= \frac{1}{M}\int_C y\sigma = \frac{3}{8}\int_{-1}^1 y(x)\sigma(g(x))\ ||g'(x)||dx = \\ &= \frac{3}{8}\int_{-1}^1 \frac{x^2}{2}(1+x^2)dx = \frac{3}{8}\left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{10}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

- A coordenada x_{CM} do centro de massa de C é $x_{CM} = 0$ uma vez que tanto a linha C, como a densidade de massa σ são invariantes em relação a $x \mapsto -x$.

(4) Considere o seguinte campo de forças definido em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,0)\ ,\quad x \in \mathbb{R}\}$:

$$F(x,y,z) = \left((x(x^2+y^2+z^2),\ -\frac{z}{y^2+z^2} + y(x^2+y^2+z^2),\ \frac{y}{y^2+z^2} + z(x^2+y^2+z^2)\right)\ .$$

(a) Mostre que F é um campo fechado.

[Resolução]

Um campo de classe C^1 diz-se fechado se as derivadas parcias cruzadas são iguais

(1) $$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y};\quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z};\quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}\ .$$

Como as derivadas parciais são

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_y}{\partial x} &= 2xy = \frac{\partial F_x}{\partial y} \\
\frac{\partial F_z}{\partial y} &= \frac{y^2+z^2-2y^2}{(y^2+z^2)^2} + 2zy = \frac{-y^2+z^2}{(y^2+z^2)^2} + 2zy \\
\frac{\partial F_y}{\partial z} &= \frac{-y^2-z^2+2z^2}{(y^2+z^2)^2} + 2yz = \frac{-y^2+z^2}{(y^2+z^2)^2} + 2yz \\
\frac{\partial F_z}{\partial x} &= 2xz = \frac{\partial F_x}{\partial z}
\end{aligned}$$

verificam-se as três igualdades (1) pelo que o campo F é fechado no seu domínio.

(b) Calcule o trabalho de F ao longo da curva definida por $x = 0$ e $y^2+z^2 = 1$, percorrida no sentido **anti-horário** para um observador colocado no ponto $(10,0,0)$. Será F um gradiente no seu domínio? Justifique.

[Resolução]
Seja C a circunferência definida por $x = 0$ e $y^2+z^2 = 1$. O campo F é uma soma de dois campos

$$\begin{aligned}
F &= F_1 + F_2 \\
F_1(x,y,z) &= \left(0,\ -\frac{z}{y^2+z^2},\ \frac{y}{y^2+z^2}\right) \\
F_2(x,y,z) &= \left(x(x^2+y^2+z^2),\ y(x^2+y^2+z^2),\ z(x^2+y^2+z^2)\right)\ .
\end{aligned}$$

Como o campo radial F_2 é fechado em $\mathbb{R}^3$, e $\mathbb{R}^3$ é simplesmente conexo, F_2 é gradiente e portanto também $\oint_C F_2 = 0$. O caminho

$$g_C\ :\ \begin{cases} x = 0 \\ y = \cos(t) \\ z = \operatorname{sen}(t) \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

percorre C no sentido pedido pelo que temos

$$\begin{aligned}\oint_C F &= \oint_C F_1 + \oint_C F_2 = \oint_C F_1 = \int_0^{2\pi} F_1(g_C(t)) \cdot g_C'(t)\ dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (0,\ -\text{sen}(t),\ \cos(t)) \cdot (0,\ -\text{sen}(t),\ \cos(t))\ dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\text{sen}^2(t) + \cos^2(t)\right)\ dt = \int_0^{2\pi} 1\ dt = 2\pi.\end{aligned}$$

F não é gradiente no seu domínio porque o integral de F ao longo do caminho fechado g_C é diferente de zero. A igualdade a zero do integral ao longo de qualquer caminho fechado é condição necessária e suficiente para que um campo vectorial seja gradiente.

(c) Calcule o trabalho de F ao longo do triângulo com vértices $(0,-3,0)$, $(0,3,3)$ e $(0,3,-3)$ percorrido no sentido **horário** para um observador colocado no ponto $(10,0,0)$.

[Resolução]

Seja g_T um caminho que percorre o triângulo T com vértices $(0,-3,0)$, $(0,3,3)$ e $(0,3,-3)$ no sentido pedido. Este caminho é homotópico, no domínio de F, ao caminho $\widetilde{g}_C$ que percorre a circunferência C da alínea anterior no sentido oposto a g_C. Logo, como F é fechado,

$$\oint_T F \cdot dg_T = -\oint_C F \cdot dg_C = -2\pi.$$

(3 val.) (5) Seja F um campo fechado de classe C^1 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Mostre que existe um real k tal que o campo vectorial

$$F - kG,$$

é um campo gradiente, onde G é o campo vectorial em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dado por

$$G = \frac{1}{x^2+y^2}(y, -x).$$

[Resolução]

O campo G também é fechado em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ pelo que o campo $F - kG$ é fechado neste conjunto para todo o $k \in \mathbb{R}$. Em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ qualquer caminho fechado g_Γ é homotópico a um caminho que dá um número inteiro, m, de voltas por uma circunferência C em torno da origem. Consideramos como positivo o sentido anti-horário pelo que $m < 0$ significa que o caminho dá $|m|$ voltas no sentido horário e então

$$\oint_\Gamma (F - kG) \cdot dg_\Gamma = m \oint_C (F - kG)\,.$$

Em particular, $m = 0$ significa que o caminho g_Γ é homotópico a um ponto (caminho fechado trivial) e que portanto o integral $\oint_\Gamma (F - kG) \cdot dg_\Gamma$ é igual a zero.

Então, um campo fechado em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ é gradiente se e só o seu integral ao longo de C é igual a zero. Temos assim de encontrar k para o qual o campo

$$F - kG$$

é gradiente ou, equivalente, para o qual

$$\oint_C (F - kG) = \ 0 \ .$$

Consideremos o caminho $g(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)),\ 0 \leq t \leq 2\pi$ que representa paramétricamente a circunferência $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$. Temos

$$\oint_C G \cdot dg = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}(t), -\cos(t)) \cdot (\operatorname{sen}(t), -\cos(t)) \ dt = -2\pi.$$

Seja $r = \oint_C F \cdot dg$. Então, escolhendo

$$k = -\frac{r}{2\pi},$$

obtemos

$$\oint_C \left(F + \frac{r}{2\pi} G\right) \cdot dg = r + \frac{r}{2\pi} \oint_C G \cdot dg = r - r = 0$$

pelo que o campo

$$F + \frac{r}{2\pi} G$$

é gradiente em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.