Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática
Unidade de Ensino de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Teste de Matemática Computacional – 17/12/2015 -Resolução

Cursos: MEEC, MEFT, MEBiol, MEBiom, MEQ, LEMat

Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	-2	-1.5	-1	0	1	2	2.5
$f(x_i)$	-3	-3.25	-3	-1	3	9	12.75

1. Determine uma expressão para o polinómio p_2, de grau ≤ 2, que interpola f nos três primeiros pontos da tabela. Calcule um valor aproximado para $f(-0.5)$. **[1.5]**

Resolução: Sejam $x_0 = -2, x_1 = -1.5, x_2 = -1, f_0 = -3, f_1 = -3.25, f_2 = -3$. Pela fórmula de Lagrange

$$p_2(x) = \sum_{j=0}^{2} f_j\, l_j(x)\,, \qquad l_j(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{2} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}\,,$$

onde

$$l_0(x) = \frac{(x+1.5)(x+1)}{(-2+1.5)(-2+1)} = 2\,(x+1.5)(x+1)\,, \quad l_1(x) = -4\,(x+2)(x+1)\,, \quad l_2(x) = 2(x+2)(x+1.5)\,,$$

obtemos

$$p_2(x) = -6\,(x+1.5)(x+1) + 13\,(x+2)(x+1) - 6\,(x+2)(x+1.5) = x^2 + 3\,x - 1\,.$$

Pela fórmula de Newton com diferenças divididas:

$$f[-2,-1.5] = \frac{f(-1.5) - f(-2)}{-1.5+2} = \frac{-3.25+3}{0.5} = -0.5\,, \qquad f[-1.5,-1] = \frac{-3+3.25}{0.5} = 0.5\,,$$

$$f[-2,-1.5,-1] = \frac{f[-1.5,-1] - f[-2,-1.5]}{-1+2} = \frac{0.5+0.5}{1} = 1\,,$$

$$p_2(x) = f[-2] + f[-2,-1.5](x+2) + f[-2,-1.5,-1]\,(x+2)(x+1.5) = -3 - 0.5\,(x+2) + (x+2)(x+1.5)\,.$$

Em particular

$$f(-0.5) \approx p_2(-0.5) = -2.25\,.$$

2. Suponha que a função f satisfaz $f(x) = \cos(x) + P(x)$, onde P é um polinómio de grau menor ou igual a 2. Sem determinar P, calcule um majorante para o erro absoluto de interpolação $|f(-0.5) - p_2(-0.5)|$. **[1.0]**

Resolução: Pela fórmula de erro

$$e_2(x) = f(x) - p_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} \prod_{j=0}^{2} (x - x_j) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}\,(x+2)(x+1.5)(x+1)\,, \qquad \xi \in (x_1; x_2; x_3; x)\,.$$

Atendendo a que P é um polinómio de grau ≤ 2, temos

$$f^{(3)}(x) = \sin x + P^{(3)}(x) = \sin x\,.$$

Portanto

$$|e_2(-0.5)| \leq \frac{1.5 \cdot 1 \cdot 0.5}{6} \max_{x\in[-2,-0.5]} |f^{(3)}(x)| = \frac{|\sin(-\pi/2)|}{8} = \frac{1}{8} = 0.125\,.$$

3. (a) Calcule aproximadamente $I = \int_{-2}^{2} f(x)dx$ por aplicação da regra de Simpson composta, utilizando apenas valores de f que constam da tabela. **[1.0]**

Resolução: Consideremos os nós (igualmente espaçados com $h = 1$ e $N = 4$):

$$x_0 = -2\,, \quad x_1 = -1\,, \quad x_2 = 0\,, \quad x_3 = 1\,, \quad x_4 = 2\,.$$

Obtém-se, pela fórmula de Simpson composta, a aproximação

$$S_4(f) = \frac{h}{3}\Big[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\Big] = \frac{1}{3}\Big[-3 - 12 - 2 + 12 + 9\Big] = \frac{4}{3}\,.$$

(b) Admitindo de novo que f é da forma $f(x) = \cos(x) + P(x)$, como na alínea 2, determine um majorante do erro absoluto da aproximação obtida para o integral I. **[1.0]**

Resolução: Pela fórmula de erro da regra de Simpson composta

$$|E_4^S(f)| = \frac{(b-a)\,h^4}{180}\,|f^{(4)}(\xi)| \le \frac{4}{180} \max_{x\in[-2,2]} |f^{(4)}(x)| = \frac{1}{45} \max_{x\in[-2,2]} |\cos x| = \frac{1}{45}\,.$$

4. Pretende-se determinar o polinómio de segundo grau que melhor se ajusta a $f(x)$, segundo o critério dos mínimos quadrados, **nos primeiros quatro pontos da tabela**. Segundo esse critério, que expressão se deve minimizar? Escreva a matriz e o segundo membro do sistema normal para este problema (não é necessário resolver o sistema). **[1.5]**

Resolução: Sejam $x_0 = -2, x_1 = -1.5, x_2 = -1, x_3 = 0$, $\phi_0(x) = 1, \phi_1(x) = x, \phi_2(x) = x^2$ e a função aproximadora $g(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x)$. A expressão a minimizar, em função dos parâmetros a_0, a_1 e a_2, é:

$$Q(a_0,a_1,a_2) = \sum_{j=1}^{3}(f(x_j) - g(x_j))^2 = \sum_{j=1}^{3}\Big(f(x_j) - (a_0\phi_0(x_j) + a_1\phi_1(x_j) + a_2\phi_2(x_j))\Big)^2.$$

O sistema normal que corresponde a este problema de minimização é:

$$\begin{bmatrix} (\phi_0,\phi_0) & (\phi_0,\phi_1) & (\phi_0,\phi_2) \\ (\phi_1,\phi_0) & (\phi_1,\phi_1) & (\phi_1,\phi_2) \\ (\phi_2,\phi_0) & (\phi_2,\phi_1) & (\phi_2,\phi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\phi_0,f) \\ (\phi_1,f) \\ (\phi_2,f) \end{bmatrix}$$

onde

$$(\phi_i,\phi_j) = \sum_{k=0}^{3}\phi_i(x_k)\phi_j(x_k)\,, \qquad (f,\phi_j) = \sum_{k=0}^{3} f(x_k)\phi_j(x_k)\,.$$

O sistema de equações normais fica assim

$$\begin{bmatrix} 4 & -4.5 & 7.25 \\ -4.5 & 7.25 & -12.375 \\ 7.25 & -12.375 & 22.0625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.25 \\ 13.875 \\ -22.3125 \end{bmatrix}$$

5. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$y'(x) = x\cos(y(x)) + \sin(y(x)), \qquad y(\pi/2) = \pi/2. \tag{1}$$

(a) Para obter um valor aproximado de $y(\pi/2 + h)$, pretende-se utilizar a seguinte fórmula:

$$y_{i+1} = y_i + h\,x_i\cos(y_i) + h\,\sin(y_i) \tag{2}$$

Diga, justificando, a que método estudado corresponde a fórmula (2) e qual a ordem desse método. No caso de $h = 0.1$, use esse método para obter um valor aproximado de $y(\pi/2 + 0.2)$. **[1.0]**

Resolução: A fórmula (2) corresponde à aplicação do método de Euler explícito para a resolução numérica do problema de valor inicial $y'(x) = f(x, y(x))$, em que $f(x, y) = x \cos y + \sin y$. Com efeito

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n) = y_n + h\,(x_n \cos y_n + \sin y_n) = y_n + h\, x_n \cos y_n + h\, \sin y_n\,, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

A ordem do método de Euler explícito é um, i.e. o erro de consistência $\tau(h) = \mathcal{O}(h)$. Com $h = 0.1$ e $x_0 = y_0 = \pi/2$, obtém-se:

$$y_1 = y_0 + h\, x_0 \cos y_0 + h \sin y_0 = \pi/2 + 0.1\, \pi/2\, \cos \pi/2 + 0.1 \sin \pi/2 = \pi/2 + 0.1 \approx 1.6708\,,$$

$$y_2 = y_1 + h\, x_1 \cos y_1 + h \sin y_1 = 1.6708 + 0.1 \cdot 1.6708\, \cos 1.6708 + 0.1\, \sin 1.6708 \approx 1.75363\,.$$

A aproximação de $y(\pi/2 + 0.2)$ é assim $y_2 = 1.75363$

(b) Determine um majorante do erro absoluto da aproximação obtida na alínea anterior. **[1.5]**

Resolução: Fórmula de erro:

$$|y(x_2) - y_2| \le \frac{hM}{2}\, \frac{e^{(x_2 - x_0)K} - 1}{K}\,,$$

onde

$$K = \max_{\substack{x\in[x_0,x_2]\\ y\in\mathbb{R}}} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| = \max_{\substack{x\in[x_0,x_2]\\ y\in\mathbb{R}}} |-x \sin y + \cos y| \le (\pi/2 + 0.2)\cdot 1 + 1 = 2.7708\,,$$

$$\begin{aligned}
M &= \max_{x\in[x_0,x_2]} |y''(x)| = \max_{x\in[x_0,x_2]} \left|\frac{d}{dx} f(x, y(x))\right| = \max_{x\in[x_0,x_2]} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + y'(x)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))\right| \\
&= \max\nolimits_{x\in[x_0,x_2]} |\cos y(x) + y'(x)\,(\cos y(x) - x \sin y(x))| \\
&= \max\nolimits_{x\in[x_0,x_2]} |\cos y(x) + (x \cos y(x) + \sin y(x))\,(\cos y(x) - x \sin y(x))| \\
&= \max\nolimits_{x\in[\pi/2,\pi/2+0.2]} |\cos y(x) + x \cos 2\, y(x) + 0.5\,(1 - x^2) \sin 2\, y(x)| \\
&\le 1 + (\pi/2 + 0.2) + 0.5((\pi/2 + 0.2)^2 - 1) \approx 3.83866\,.
\end{aligned}$$

Portanto

$$|y(x_2) - y_2| \le \frac{0.1 \cdot 3.83866}{2 \cdot 2.7708}\Big(e^{2.7708\cdot 0.2} - 1\Big) \approx 0.05129\,.$$

6. Sabe-se que a equação diferencial (1) também pode ser escrita na forma

$$y(b) = y(a) + \int_a^b \Big(t \cos y(t) + \sin y(t)\Big)dt, \tag{3}$$

onde $a, b \in I\!R$. Baseando-se na fórmula (3) e na regra dos trapézios para aproximar o integral, deduza uma fórmula do tipo

$$y_{i+1} = y_i + C_1 f_i + C_2(x_{i+1} \cos(y_i + h f_i) + \sin(y_i + h f_i)), \tag{4}$$

onde $fi = (x_i \cos(y_i) + \sin(y_i))$, para aproximar o problema (1). Determine os coeficientes C_1 e C_2 e diga justificando qual a ordem deste método. Mediante uma única aplicação da fórmula (4) obtenha um novo valor aproximado de $y(\pi/2 + 0.2)$. **[1.5]**

Resolução: Pela regra dos trapézios, obtém-se

$$\begin{aligned}
y(x_n + h) &= y(x_n) + \int_{x_n}^{x_n+h} \Big(t \cos y(t) + \sin y(t)\Big)dt \\
&= y(x_n) + \frac{h}{2}\Big(x_n \cos y(x_n) + \sin y(x_n) + (x_n + h) \cos y(x_n + h) + \sin y(x_n + h)\Big) + \mathcal{O}(h^3)\,.
\end{aligned}$$

Temos

$$y(x_n+h)=y(x_n)+h\,y'(x_n)+\frac{h^2}{2}\,y''(\xi)=y(x_n)+h\,f(x_n,y(x_n))+\frac{h^2}{2}\,y''(\xi)\,,\qquad \xi\in(x_n,x_n+h)\,.$$

Além disso,

$$f(x_n+h,y(x_n+h))=f(x_n+h,y(x_n+h\,f(x_n,y(x_n))))+\frac{h^2}{2}\,y''(\xi)\,\frac{\partial}{\partial y}\,f(x,y)|_{y=x_n+h\,f(x_n,y(x_n))}\,,$$

ou seja

$$\cos y(x_n+h)=\cos y(x_n+h\,f(x_n,y(x_n)))+\mathcal{O}(h^2)\,,$$

$$\sin y(x_n+h)=\sin y(x_n+h\,f(x_n,y(x_n)))+\mathcal{O}(h^2)\,,$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}y(x_n+h)&=y(x_n)+\frac{h}{2}\Big(x_n\cos y(x_n)+\sin y(x_n)\Big)\\&\quad+\frac{h}{2}\Big((x_n+h)\cos y(x_n+h\,f(x_n,y(x_n)))-\sin y(x_n+h\,f(x_n,y(x_n)))+\mathcal{O}(h^2)\Big)+\mathcal{O}(h^3)\end{aligned}$$

Ignorando os termos de ordem $\mathcal{O}(h^3)$, obtém-se a fórmula

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\Big(f_n+x_{n+1}\cos(y_n+h\,f_n)+\sin(y_n+h\,f_n)\Big)\,,$$

onde $x_{n+1}=x_n+h$ e $f_n=f(x_n,y_n)=x_n\cos y_n+\sin y_n$. Este método é da forma (4), com $C_1=C_2=\frac{h}{2}$. O erro de truncatura local é $\mathcal{O}(h^3)$ ou seja, a ordem do método é 2. O método corresponde ao método de Heun, um dos métodos de Runge-Kutta de ordem 2.

Aplicando o método uma única vez com $h=0.2$, obtemos uma aproximação de $y(\pi/2+0.2)$:

$$y_1=y_0+\frac{h}{2}\Big(f_0+x_1\cos(y_0+h\,f_0)+\sin(y_0+h\,f_0)\Big)\approx 1.73362\,.$$

Note-se que

$$x_0=\pi/2\,,\quad y_0=\pi/2\,,\quad x_1=\pi/2+0.2\approx 1.7708\,,\quad f_0=x_0\cos y_0+\sin y_0=1\,,\quad y_0+h\,f_0\approx 1.7708\,.$$