Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática
Unidade de Ensino de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Matemática Computacional – 12/11/2015 - Versão 1
Cursos: MEEC, MEFT, MEBiol, MEBiom, MEQ, LEMat

1. Considere a função $f(x_1, x_2) = \ln(x_1/x_2)$, para $x_1, x_2 > 0$.

(a) Diga, justificando, para que valores de x_1 e x_2 o cálculo de $f(x_1, x_2)$ é um problema mal condicionado. *Sugestão*: calcule os números de condição $p_{f,k}(x_1, x_2) = \dfrac{x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, x_2)}{f(x_1, x_2)}$ **[1.0]**

Resolução: Note-se que $f(x_1, x_2) = \ln(x_1/x_2) = \ln x_1 - \ln x_2$. Os números de condição:

$$p_{f,1}(x_1, x_2) = \frac{x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)}{f(x_1, x_2)} = \frac{x_1 \frac{1}{x_1}}{\ln(x_1/x_2)} = \frac{1}{\ln x_1 - \ln x_2},$$

$$p_{f,2}(x_1, x_2) = \frac{x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)}{f(x_1, x_2)} = -\frac{x_2 \frac{1}{x_2}}{\ln(x_1/x_2)} = \frac{1}{\ln x_2 - \ln x_1}.$$

O cálculo de $f(x_1, x_2)$ é um problema mal condicionado quando $x_1 \approx x_2$.

(b) Sejam $x_1 = 0.1002$ e $x_2 = 0.10005$ e $\tilde{x}_1 = fl(x_1)$, $\tilde{x}_2 = fl(x_2)$ onde $fl(x)$ é a representação de x no sistema do ponto flutuante $FP(10, 4, -10, 10)$ com arredondamento simétrico. Determine o erro relativo de $\tilde{f} = fl(f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2))$. **[1.0]**

Resolução: Temos

$$\tilde{x}_1 = fl(x_1) = 0.1002, \qquad \tilde{x}_2 = fl(x_2) = 0.1001, \qquad f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = 0.9985023\ldots \cdot 10^{-3},$$

$$fl(f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)) = 0.9985 \cdot 10^{-3}, \qquad f(x_1, x_2) = 0.14981276\ldots \cdot 10^{-2}$$

O erro relativo de $\tilde{f} = fl(f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2))$ é pois:

$$\delta_{\tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)} = \frac{f(x_1, x_2) - \tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)}{f(x_1, x_2)} = 0.3335 \approx 33\%.$$

O erro relativo de $\tilde{f}$ pode ser **aproximado** pela fórmula

$$\delta_{\tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)} \approx p_{f,1}(x_1, x_2)\, \delta_{\tilde{x}_1} + p_{f,2}(x_1, x_2)\, \delta_{\tilde{x}_2} = \frac{\delta_{\tilde{x}_1} - \delta_{\tilde{x}_2}}{\ln(x_1/x_2)} = \frac{0 + 0.49975 \cdot 10^{-3}}{0.14981276 \cdot 10^{-2}} = 0.3336 \approx 33\%.$$

De facto,

$$\tilde{f} = fl\big(fl(\ln(\tilde{x}_1)) - fl(\ln(\tilde{x}_2))\big) = fl(-0.2301 \cdot 10^1 + 0.2302 \cdot 10^1) = 0.1 \cdot 10^{-2}.$$

Assim

$$\delta_{\tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)} = \frac{f(x_1, x_2) - \tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)}{f(x_1, x_2)} = 0.3325 \approx 33\%.$$

2. Considere as funções $g(x) = \frac{5}{9}\,x + \frac{10}{9\,x^2} - \frac{4}{9\,x^5}$ e $f(x) = 4\,x^6 - 10\,x^3 + 4$. A função f tem 2 zeros reais $z_1 = 2^{1/3}$ e $z_2 = 2^{-1/3}$.

(a) Mostre que z_1 e z_2 são pontos fixos da função g. Classifique cada um deles em atractor ou repulsor. Indique se é possível haver convergência (pelo menos local) do método iterativo $x_{m+1} = g(x_m), m \geq 0$, para algum desses pontos. **[1.5]**

Resolução: É fácil ver que

$$g(z_1) = g(2^{1/3}) = \frac{5}{9}\,2^{1/3} + \frac{10}{9}\,2^{-2/3} - \frac{4}{9}\,2^{-5/3} = \frac{5}{9}\,2^{1/3} + \frac{5}{9}\,2^{1/3} - \frac{1}{9}\,2^{1/3} = 2^{1/3}\,,$$

$$g(z_2) = g(2^{-1/3}) = \frac{5}{9}\,2^{-1/3} + \frac{10}{9}\,2^{2/3} - \frac{4}{9}\,2^{5/3} = \frac{5}{9}\,2^{-1/3} + \frac{20}{9}\,2^{-1/3} - \frac{16}{9}\,2^{-1/3} = 2^{-1/3}\,,$$

ou seja z_1 e z_2 são pontos fixos de g.

Alternadamente, pode-se mostrar que, para $x \neq 0$, temos

$$x = g(x) \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{5}{9}\,x + \frac{10}{9\,x^2} - \frac{4}{9\,x^5} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{4}{9}\,x - \frac{10}{9\,x^2} + \frac{4}{9\,x^5} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 4x^6 - 10\,x^3 + 4 = 0$$

Um ponto fixo z de g é atractor se $|g'(z)| < 1$, superatractor se $|g'(z)| = 0$ e repulsor se $|g'(z)| > 1$. Temos $g \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ e

$$g'(x) = \frac{5}{9}\Big(1 - \frac{4}{x^3} + \frac{4}{x^6}\Big)\,, \qquad g'(z_1) = 0\,, \qquad g'(z_2) = 5\,.$$

Assim o ponto fixo z_1 é superatractor e o ponto fixo z_2 é repulsor e o método iterativo $x_{m+1} = g(x_m), m \geq 0$, converge, pelo menos localmente, para o ponto fixo z_1, com ordem de convergência pelo menos quadrática. O método iterativo não converge para o ponto fixo z_2.

(b) Pretende-se aplicar o método iterativo de Newton para a aproximação numérica das raízes da equação $f(x) = 0$. Com $x_0 = 1.4$ calcule as duas primeiras iteradas do método de Newton. **[1.0]**

Resolução: Temos $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $f'(x) = 24\,x^5 - 30\,x^2$. O método de Newton escreve-se

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{4\,x_n^6 - 10\,x_n^3 + 4}{24\,x_n^5 - 30\,x_n^2} = \frac{10\,x_n^6 - 10\,x_n^3 - 2}{12\,x_n^5 - 15\,x_n^2}\,, \quad n = 0, 1, \ldots\,.$$

As duas primeiras iteradas, partindo de $x_0 = 1.4$:

$$x_1 = 1.30498\,, \quad x_2 = 1.26643\,.$$

(c) Mostre que a sucessão $\{x_n\}_{n\geq 0}$ gerada pelo método de Newton a partir de $x_0 = 1.4$ converge monotonamente para o ponto fixo $z_1 = 2^{1/3}$ de g. **[1.5]**

Resolução: Visto que $1.25992 \approx z_1 < x_2 < x_1 < x_0 = 1.4$, consideremos as condições suficientes de convergência no intervalo $I=[1.2,1.4]$:

1. $f(1.2) \approx -1.34 < 0\,, \qquad f(1.4) \approx 6.68 > 0\,;$

2. $f'(x) = 24\,x^5 - 30\,x^2 = 2x^2\,(12x^3 - 15) \geq f'(1.2) \approx 16.5 > 0 \;\; \forall x \in I\,;$

   $(\,f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow x = (15/12)^{1/3} \approx 1.08 \notin I\,);$

3. $f''(x) = 120\,x^4 - 60\,x = 60\,x\,(2x^3 - 1) > 0 \;\; \forall x \in I\,;$

4. $f(x_0)\,f''(x) = f(1.4)\,f''(x) > 0 \;\; \forall x \in I\,.$

As condições são satisfeitas e o método de Newton converge monotonamente para a raiz (única no intervalo I) $z_1 = 2^{1/3}$ de f ou seja, para o ponto fixo z_1 de g.

3. Seja o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

(a) Considere a aplicação do método de Gauss-Seidel ao sistema (1). Calcule a matriz de iteração do método, C_{GS}, tal que se tem $x^{(k+1)} = C_{GS}\,x^{(k)} + d$. Indique o vector d. Mostre que o método converge para a solução do sistema qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)}$. **[1.5]**

Resolução: O método de Gauss-Seidel é da forma

$$x^{(k+1)} = C_{\mathrm{GS}}\,x^{(k)} + d\,,$$

com $C_{\mathrm{GS}} = -\,(D+L)^{-1}\,U$ e $d = (D+L)^{-1}\,b$.

A matriz de iteração C_{GS} e o vector d:

$$C_{\mathrm{GS}} = -\,(D+L)^{-1}\,U = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -3 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$d = (D+L)^{-1}\,b \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

Os valores próprios de C_{GS}:

$$\det(\lambda I - C_{\mathrm{GS}}) = \lambda\left(\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{3}{5}\right) + \frac{3}{10}\right) = \lambda^2\left(\lambda - \frac{1}{10}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{1,2} = 0\,, \;\; \lambda_3 = \frac{1}{10}\,.$$

Portanto $\rho(C_{\mathrm{GS}}) = \max_{1\leq j\leq 3}|\lambda_j| = \frac{1}{10}$. Como $\rho(C_{\mathrm{GS}}) < 1$, o método de Gauss-Seidel converge para a solução única do sistema linear qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Com $x^{(0)} = [1,1,1]^T$, efetue uma iteração pelo método de Gauss-Seidel. **[1.0]**

Resolução: Pelas fórmulas computacionais, obtém-se:

$$x_1^1 = \frac{1}{1}\Big(1 - 1\cdot 1 - 1\cdot 1\Big) = -1$$

$$x_2^1 = \frac{1}{-2}\Big(0 - 1\cdot(-1) + 5\cdot 1\Big) = -3$$

$$x_3^1 = \frac{1}{5}\Big(0 - 0 - 1\cdot(-3)\Big) = \frac{3}{5}\,.$$

(c) Considere a sucessão definida por **[1.5]**

$$x_{n+1} = p\,x_n + q\,c/x_n^2 + rc^2/x_n^5\,. \tag{2}$$

Mostre que, para qualquer $c > 0$, se (p, q, r) for a solução do sistema (1) então o método iterativo (2) converge para $c^{1/3}$, pelo menos localmente, com ordem de convergência cúbica.

Resolução: O método iterativo (2) é do tipo ponto fixo $x_{n+1} = g(x_n)$ em que $g(x) = p\,x + q\,c/x^2 + rc^2/x^5$. Pelo teorema sobre a convergência local supralinear do método do ponto fixo, a sua ordem de convergência, para o ponto fixo $z = c^{1/3}$, é cúbica se e só se

$$g(z) = z\,, \qquad g'(z) = 0\,, \qquad g''(z) = 0\,, \qquad g'''(z) \neq 0\,.$$

Para que a ordem seja pelo menos cúbica:

$$g(c^{1/3}) = p\,c^{1/3} + q\,c^{1/3} + r\,c^{1/3} = c^{1/3}\left(p + q + r\right) = c^{1/3} \quad \Leftrightarrow \quad p + q + r = 1$$

$$g'(c^{1/3}) = p - 2q - 5r = 0$$

$$g''(c^{1/3}) = 6\,q\,c^{-1/3} + 30\,r\,c^{-1/3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q + 5\,r = 0\,.$$

Isto corresponde ao sistema linear (1).

Além disso

$$g'''(c^{1/3}) = -6\cdot c^{-2/3}\left(4\,q + 35\,r\right) = 15\,c^{-2/3}\,r \neq 0\,,$$

visto que $c > 0$ e $r \neq 0$. (Se $r = 0$ então $q = p = 0$ o que é impossível).