Matemática Computacional

Exercícios - Ficha 9

1° Semestre — 2015/16

1. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - x + 4y(x) & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

com solução exacta $y(x) = x/4 - 3/16 + (19/16)\, e^{4x}$.

(a) Obtenha um valor aproximado y_2 para $y(0.2)$ usando o método de Euler com passo $h = 0.1$.

(b) Recorrendo a um resultado teórico, deduza um majorante para $|y(0.2) - y_2|$. Compare com o valor do erro de facto cometido.

(c) Utilize o método de Taylor de ordem 2, com $h = 0.1$, para obter uma aproximação de $y(0.2)$. Compare com o resultado da alínea a).

R: a) $y_2 = 2.19$; b) $|y_2 - y(0.2)| \le 0.648$; erro de facto cometido: $e_2 = 0.315$. c) $y_2 = 2.4636$.

2. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = \sin(x\, y(x)) & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(a) Aplique o método de Euler com $h = 0.1$ e calcule uma aproximação para $y(0.2)$.

(b) Obtenha um majorante para o erro absoluto do valor obtido na alínea anterior, desprezando erros no valor inicial y_0.

(c) Qual deverá ser o valor do passo h para poder garantir um erro absoluto não superior a 10^{-4} no valor calculado na alínea b)?

3. Utilize o método do ponto médio (Euler modificado) para obter uma aproximação da solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = x + y(x) & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

no ponto $x = 0.1$ com espaçamentos $h = 0.1, 0.05, 0.025$. Sabendo que a solução exacta deste problema é dada por $y(x) = e^x - 1 - x$, compare os resultados obtidos com o valor exacto de $y(0.1)$. Comente.

R: $h = 0.1$, $y_1 = 0.005$; erro: 1.7×10^{-4}; $h = 0.05$, $y_2 = 0.0051266$; erro: 4.4×10^{-5}; $h = 0.025$, $y_4 = 0.00515962$; erro: 1.1×10^{-5}. Quando se reduz o passo para metade, o erro diminui aproximadamente 4 vezes, visto tratar-se de um método de segunda ordem.

4. Considere o seguinte problema de valores iniciais para uma equação diferencial de segunda ordem

$$\begin{cases} y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

   (a) Determine o valor aproximado de $y(1)$, pelo método de Euler com $h = 0.5$.
   (b) Idem, mas pelo método do ponto médio.

5. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) - x^2 + 1 \quad 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 0.5 \end{cases}$$

   com solução exacta dada por $y(x) = 1 + 2\,x + x^2 - 0.5\,e^x$.

   (a) Obtenha um valor aproximado para $y(1)$ pelo método de Heun com $h = 0.2$.
   (b) Idem, mas pelo método do ponto médio.
   (c) Idem, mas pelo método de Taylor de ordem 2.
   (d) Compare as soluções aproximadas obtidas nas alíneas anteriores com a solução exacta. Comente.

6. Verifique que o método do ponto médio, quando aplicado ao problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = -20\,y(x) \quad 0 \leq x \leq 20 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   resulta na fórmula de recorrência $y_{n+1} = (1 - 20h + 200h^2)^{n+1}, \ \forall n \geq 0$.

   (a) Aplique este método (com $h = 0.1$) para obter um valor aproximado de $y(1)$ e compare o resultado com o valor exacto, sabendo que a solução do problema anterior é $y(x) = \exp(-20x)$.
   (b) Se $h > 0.1$ o que acontece com a solução fornecida por este método de Runge-Kutta? Comente.

7. Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -t\,y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   com a solução (única) $y(t) = e^{-t^2/2}$.

   (a) Compare o valor exacto de $y(2)$ com o valor aproximado dado pelo método de Euler, considerando $h = 1, h = 0.5$.
   (b) Apresente estimativas de erro para os valores obtidos em a), e determine o número de passos de forma a garantir um erro absoluto inferior a 10^{-6} (considerando que o valor inicial é exacto).

   R: a) com $h = 1, y(2) \approx y_2 = 0$; com $h = 0.5, y(2) \approx y_4 = 0.09375$. b) Estimativa do erro: para $x_n = 2$, $|y_n - y(x_n)| \leq h\frac{e^4-1}{4}$.

8. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - \dfrac{y(x)}{x} & 2 \leq x \leq 3 \\ y(2) = 2 \end{cases}$$

com solução exacta dada por $y(x) = x/2 + 2/x$. Determine um valor aproximado para $y(2.1)$ pelo método de Euler com $h = 0.1, 0.05, 0.025$. Confirme que a convergência do método de Euler é de ordem 1.

R: $h = 0.1$, $y_1 = 2$; erro: 0.00238; $h = 0.05$, $y_2 = 2.0012$; erro: 0.0012; $h = 0.025$, $y_4 = 2.0018$; erro: 0.0006. Quando se reduz o passo para metade, o erro também diminui aproximadamente para metade pois o método de Euler é de ordem 1.

9. Considere o problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^x & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \end{cases}$$

Obtenha valores aproximados para $y(0.2)$ e $y'(0.2)$ pelo método de Euler com passo $h = 0.1$.

10. Considere o seguinte problema de valores iniciais para uma equação diferencial de segunda ordem

$$\begin{cases} u''(x) = u(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = 0 \end{cases}$$

(a) Aplique o método de Euler com $h = 0.25$, para determinar a aproximação de $u(1)$, e compare com a solução exacta do problema.

(b) O mesmo que em a), mas usando o método do ponto-médio (RK de ordem 2).

(c) Considere agora a equação de segunda ordem

$$\begin{cases} u''(x) = u^3(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

e aproxime $u(1)$ usando o método do ponto médio com $h = 0.5, h = 0.25, h = 0.1$.

Euler	$y_{n+1} = y_n + hf_n$
Euler Implícito	$y_{n+1} = y_n + hf_{n+1}$
Ponto Médio/Euler modificado	$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + h/2, y_n + h/2f_n)$
Heun	$y_{n+1} = y_n + h/2(f_n + f(x_n + h, y_n + hf_n))$