Matemática Computacional

Exercícios - Ficha 8

1° Semestre — 2015/16

1. Considere o integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$.

   a) Determine o seu valor aproximado, considerando 4 subintervalos e utilizando:

   i. A regra dos Trapézios. **ii.** A regra de Simpson.

   b) Faça uma estimativa do número mínimo de subintervalos que se deveria considerar, se se pretendesse calcular o integral da alínea anterior, com um erro inferior a 10^{-4}, mediante cada uma das regras referidas.

   Solução: a) i) 1.49068; ii) 1.46371; b) i) 117; ii) 12.

2. No intervalo $[0, a]$, uma função f é assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & 0 \leq x \leq 1 \\ 3x - 1 & 1 \leq x \leq a \end{cases}$$

   a) Obtenha aproximações para o integral $I(f) = \int_0^a f(x)dx$, com $a = 2$ e $a = 3$, dos seguintes modos:

   i. Utilizando a regra dos trapézios composta, com passo $h = 1$.

   ii. Utilizando a regra de Simpson simples.

   b) Determine o erro de cada um dos resultados obtidos, comparando com o valor exacto de $I(f)$.

   c) A fórmula do erro da regra dos trapézios é aplicável neste caso? E a da regra do Simpson? Justifique.

   Solução: Fórmula dos trapézios composta: para $a = 2, T_2 = 6$; se $a = 3, T_3 = 25/2$ (em ambos os casos obtém-se o valor exacto do integral). Fórmula de Simpson: $a = 2, S = 16/3$; $a = 3, S = 25/2$ (só no segundo caso se obtém o valor exacto do integral.

   Explicação: A função considerada não é continuamente diferenciável em [0,3] (a primeira derivada é descontínua em $x = 1$). A fórmula do erro, em geral, não é aplicável, nem para a regra dos trapézios nem para a de Simpson. No entanto, quando se aplica a regra dos trapézios composta, estamos a integrar a função separadamente em $[0, 1]$, $[1, 2]$ e em $[1, 3]$. Como a função é infinitamente diferenciável em cada um destes intervalos, a fórmula do erro de integração pode ser aí aplicada. De acordo com essa fórmula, o erro é nulo (a segunda derivada de um polinómio de grau 1 é 0). Assim se explica que a regra dos trapézios composta com $h = 1$ seja exacta para esta função. O mesmo raciocínio não é válido para a regra de Simpson, já que, neste caso, a função é integrada no intervalo $[0, 3]$. Ainda assim, no caso de $a = 3$, a regra de Simpson leva-nos ao valor exacto do integral (o que acontece por coincidência).

3. Pretende–se construir uma fórmula de quadratura do tipo

$$Q(g) = A_0 g(0) + A_1 g(1) \quad \text{para aproximar} \quad I = \int_0^1 e^x g(x) dx$$

a) Calcule A_0 e A_1 de modo a que a fórmula seja exacta para funções $g(x) = a + bx$ com $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Seja $g(x) = \sin(x)$. Obtenha uma aproximação de I usando a regra de quadratura obtida em a) e calcule uma estimativa do erro absoluto.

c) Determine um valor aproximado para I usando a regra dos Trapézios composta com **4 subintervalos.**

d) Determine o número mínimo de subintervalos necessários na regra dos Trapézios composta, para garantir que o erro absoluto do resultado seja inferior a 10^{-2} (despreze erros de arredondamento).

4. Pretende-se obter a fórmula de integração

$$Q(f) = A_0 f(0) + A_1[f(x_1) + f(-x_1)]$$

de modo a que ela seja pelo menos de grau 2 para o integral $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$.

a) Exprima A_0 e A_1 em função de x_1.

b) Mostre que a fórmula obtida é pelo menos de grau 3 e determine x_1 de modo a que a fórmula seja pelo menos de grau 5.

Solução:

(a) Os pesos A_0 e A_1 são solução do sistema

$$\begin{cases} A_0 + 2\,A_1 & = 2 \\ \qquad 2\,x_1^2\,A_1 & = 2/3 \end{cases}$$

Logo, $A_1 = 1/(3\,x_1^2)$ e $A_0 = (6\,x_1^2 - 2)/(3\,x_1^2)$ e $Q(f) = \frac{6\,x_1^2-2}{3\,x_1^2}\,f(0) + \frac{1}{3\,x_1^2}\,[f(x_1) + f(-x_1)]$.

(b) Como $Q(x^3) = I(x^3) = 0$ e $Q(x^4) = 2/3\,x_1^2$, a regra é pelo menos de grau 3. Atendendo a que $Q(x^4) = I(x^4) = 2/5$ se e só se $x_1 = \pm\sqrt{3/5}$, fazendo $x_1 = \sqrt{3/5}$, e dado que $Q(x^5) = I(x^5) = 0$, a regra respectiva é pelo menos de grau 5 de exactidão.

5. A tabela seguinte mostra os resultados obtidos por uma regra de Newton-Cotes (composta) no cálculo do integral $I(f)$ de uma certa função f indefinidamente diferenciável.

n	8	16	32	64
I_n	295.27	274.15	268.97	267.68

O valor I_n representa a **aproximação** obtida com $n+1$ nós de integração. Sabendo que o **valor exacto** do integral é $I(f) = 267.25$, diga, justificando, que fórmula pode· ter sido utilizada (Trapézios ou Simpson).

6. Pretende-se obter uma fórmula com dois nós no intervalo $[-1, 1]$, i.e. uma fórmula do tipo:

$$I_1(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

a) Escreva o sistema de equações que lhe permite calcular A_0 e A_1 de modo a que a fórmula seja, pelo menos, de grau 1.

b) Resolva o sistema em ordem a A_0 e A_1.

c) Mostre que, se x_0 e x_1 forem tais que $x_0 x_1 = -\frac{1}{3}$, a fórmula de integração assim obtida tem pelo menos grau 2.

Solução: b) $A_1 = \dfrac{2x_0}{x_0 - x_1}$; $A_0 = \dfrac{-2x_1}{x_0 - x_1}$.

7. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x	-1	1	2	3	5	7
$f(x)$	-1	1	-1	1	2	$5/2$

a) Obtenha dois valores aproximados para $\int_{-1}^{7} f(x)dx$, de duas maneiras distintas, recorrendo a fórmulas de quadratura e usando o maior número possível de pontos da tabela. Justifique a escolha dos pontos.

b) Supondo que $\max_{x\in[-1,7]}|f^{(n)}(x)| \leq M_n$, $\forall n$, com M_n constante real, determine expressões, em função de M_n, para os erros de integração nos dois casos que considerou na alínea anterior.

8. Seja $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$ e seja $\mathcal{P}_m$ o espaço dos polinómios de grau menor ou igual a m. Pretende-se aproximar I por uma fórmula do tipo

$$Q(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2),$$

com $x_0, x_1, x_2 \in [-1, 1]$.

(a) Determine os coeficientes A_0, A_1 e A_2 de modo que Q seja exacta sobre $\mathcal{P}_2$ nos seguintes casos

(i) $x_0 = -1, x_1 = 1/2, x_2 = 1$;

(ii) $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$;

(iii) $x_0 = -\sqrt{3}/3, x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3}/3$;

(iv) $x_0 = -\sqrt{3/5}, x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3/5}$.

(b) Relativamente às fórmulas obtidas na alínea anterior, determine o grau de Q.

Solução: i)$A_0 = 5/9, A_1 = 16/9, A_2 = -1/3$; grau 2; ii) $A_0 = 1/3, A_1 = 4/3; A_2 = 1/3$; grau 3 ; iii)$A_0 = A_2 = 1; A_1 = 0$; grau 3; iv) $A_0 = A_2 = 5/9, A_1 = 8/9$; grau 5.