

# Matemática Computacional

## Exercícios - Ficha 7

1º Semestre — 2015/16

1. Considere a seguinte tabela:

$x$	1.0	1.2	1.5	1.6
$f(x)$	5.44	6.64	8.96	9.91

- Obtenha o polinómio do primeiro grau que se ajusta (no sentido dos mínimos quadrados) aos pontos da tabela.
- Idem, mas para o polinómio do segundo grau. Utilizando o polinómio obtido, determine uma estimativa do valor de  $f(1.4)$ .
- Relativamente aos dois casos anteriores, calcule o valor das somas dos quadrados dos desvios correspondentes aos ajustamentos efectuados. Qual seria o valor dessa soma, no caso de se fazer o ajustamento por um polinómio do 3º grau.

R: a)  $P_1(x) = -2.135933 + 7.451647x$

b)  $P_2(x) = 3.966473 - 2.244618x + 3.721460x^2$ ;  $f(1.4) \approx P_2(1.4) = 8.118$ .

c)  $\sum_{i=0}^3 (f(x_i) - P_1(x_i))^2 = 0.06485$ ;  $\sum_{i=0}^3 (f(x_i) - P_2(x_i))^2 = 0.306 \times 10^{-2}$ ;

$\sum_{i=0}^3 (f(x_i) - P_3(x_i))^2 = 0$ .

2. Determine a função da forma  $g(x) = Ae^x + Be^{-x}$  que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, à seguinte tabela de valores

$x$	0	0.5	1.0
$f(x)$	5.0	5.2	6.5

Para simplificar os cálculos, escreva os elementos da matriz usando arredondamento simétrico e uma casa decimal.

R:  $A = 2.0$ ;  $B = 3.0$ .

3. Seja  $f$  tal que  $f(-2) = 3$ ,  $f(0) = 6$  e  $f(2) = 15$ . Obtenha a função do tipo  $g(x) = ax + b$  que melhor se ajusta aos valores dados, no sentido dos mínimos quadrados. Mostre ainda que

$$\sum_{i=1}^3 (f(x_i) - \alpha x_i - \beta)^2 \geq 6$$

quaisquer que sejam  $\alpha, \beta$  constantes reais.

R:  $a = 3, b = 8, \quad \sum_{i=1}^3 (f(x_i) - ax_i - b)^2 = 6.$

4. Considere os 6 pontos  $(-1, 7), (0, 6), (1, 6), (2, 4), (4, 3), (5, 1)$ .

(a) Determine a função  $g(x) = a - x + bx^2$  cujo gráfico melhor se ajusta aos pontos segundo o método dos mínimos quadrados.

(b) O mesmo que em a) usando  $g(x) = a e^{bx} - \frac{x^2}{4}$ , e uma transformação de variáveis.

5. Dada a tabela

$x$	0	1.5	3.0	4.5	6.0
$f(x)$	1.00	1.57	2.00	4.30	7.00

diga em que consiste a sua melhor aproximação de mínimos quadrados por funções aproximantes do tipo  $g(x) = ax + b \cos(x)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Calcule esta melhor aproximação, bem como o desvio em 4.5. EXAME, LEIC 15/12/2001

6. Considere a seguinte tabela de valores de uma função  $f$  :

$x_j$	0	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$
$f_j$	1	0.5	-1	0

(a) Obtenha a função do tipo  $g(x) = a_0 + a_1 \sin(x) + a_2 \cos(x)$  que melhor aproxima  $f$  no sentido dos mínimos quadrados e determine  $Q = \sum_{j=0}^3 (f(x_j) - g(x_j))^2$ .

(b) Seja  $Q_1 = \sum_{j=0}^3 (f(x_j) - a \cos(x_j))^2$ . Com base na alínea anterior justifique que  $Q_1 > 0.0625, \forall a \in \mathbb{R}$ . EXAME, LEIC 13/02/2003

7. Considere a aproximação de mínimos quadrados para os pontos

$$(-1, 1), (0, 1), (1, 2), (2, 2)$$

por uma função  $g(x) = a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2 + a_3 \phi_3$  com

$$\phi_1(x) = 1, \quad \phi_2(x) = x, \quad \phi_3(x) = \sin(x) + x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x + 1.$$

Diga se a matriz do sistema normal é invertível e comente a escolha das funções  $\phi_k$ .