Matemática Computacional

Exercícios - Ficha 6

1° Semestre — 2015/16

1. Na tabela seguinte são apresentados valores duma função $f \in C^2(]0, +\infty[)$

x	0.8	1.0	1.6
$f(x)$	1.890	2.000	3.185

   (a) Obtenha a expressão do polinómio interpolador de f nos três pontos tabelados, através da fórmula de Lagrange.

   (b) Idem, mas através da fórmula de Newton.

   (c) Calcule uma aproximação para $f(1.3)$. Obtenha um majorante do erro a partir da expressão do erro de interpolação, admitindo que $f(x) - 1/x$ é um polinómio de grau não superior a 2.

   R: (a) $p_2(x) = 1.890\,\dfrac{(x-1.0)(x-1.6)}{0.16} - 2\,\dfrac{(x-0.8)(x-1.6)}{0.12} + 3.185\,\dfrac{(x-0.8)(x-1)}{0.48}$.

   (b) $p_2(x) = 1.890 + 0.55\,(x-0.8) + 1.78125\,(x-0.8)\,(x-1.0)$.

   (c) $|f(1.3) - p_2(1.3)| \le \dfrac{1}{3!}\dfrac{6}{0.8^4}\,|(1.3-0.8)(1.3-1.0)(1.3-1.6)|$.

2. Designando por N ($N \ge 1$) o número de subintervalos, de igual comprimento $h = 1/N$, do intervalo $I = [0, 1]$, pretende-se construir uma tabela de valores da função e^x nesse intervalo, usando os pontos igualmente afastados

$$x_j = j\,h, \qquad j = 0, 1, \ldots, N\,.$$

   Em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, para $0 \le i \le (N-1)$, a função é aproximada pelo polinómio interpolador de grau ≤ 1, nos pontos x_i e x_{i+1}. Determine o valor máximo do espaçamento h (ou o menor valor de N), de modo que o erro de interpolação em qualquer ponto do intervalo I seja inferior a 10^{-6}.

   R: $h < \sqrt{8 \times 10^{-6}/e} \simeq 1.716 \times 10^{-3}$, $N = 583$.

3. Considere a função real cujos valores são dados na seguinte tabela:

x	-2	-1	-0.5	0
$f(x)$	6	2	α	4

   (a) Supondo que f é um polinómio de grau 2, obtenha esse polinómio e calcule o valor de α, usando a fórmula de Lagrange.

(b) Utilizando o polinómio obtido na alínea anterior e supondo que f tem a forma $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, calcule de novo o valor de α.

4. Considere a seguinte tabela de valores da função $f(x) = \log_{10}(x)$:

x_i	2.0	2.5	3.0
$\log_{10} x_i$	0.30103	0.39794	0.47712

(a) Usando a fórmula de Newton e todos os pontos da tabela, calcule uma aproximação de $f(2.4)$.

(b) Determine um majorante do erro absoluto cometido ao aproximar $f(x)$, pelo método utilizado na alínea anterior, quando $x \in [2, 3]$. Compare com o erro do resultado obtido para $x = 2.4$.

$R:$ (a) $f(2.4) \simeq p_2(2.4) = 0.379976$, $e_2(2.4) = f(2.4) - p_2(2.4) = 0.000235$, $E = \max_{2.0 \leq x \leq 3.0} |f(x) - p_2(x)| \leq 0.000871$.

5. Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f(x)$, tal que $f \in C([0, 0.55])$:

x	0.2	0.34	0.4	0.52	0.65	0.72
$f(x)$	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

(a) Obtenha uma aproximação de $f(0.47)$ usando um polinómio interpolador de grau 2. Justifique a escolha dos nós de interpolação.

(b) Admitindo que $f \in C^3([0, 1])$ e que $\max_{x\in[0,1]}|f^{(3)}(x)| = M$, calcule um majorante para o erro do resultado obtido na alínea anterior.

R: (a) Usando os nós $x_0 = 0.34, x_1 = 0.4, x_2 = 0.52$: $f(0.47) \approx P_2(0.47) = 0.27802$.
(b) $|f(x) - P_2(x)| \leq M \times 0.758 \times 10^{-4}$.

6. Seja f uma função que nos nós $\{-1, 1, 3\}$ tem como polinómio interpolador $p_2(x) = 3 - 2x + 6x^2$.

(a) Sabendo que $f[-1, 1, 2] = 4$, calcule o polinómio p_3 que interpola f nos nós anteriores e também em $x_3 = 2$.

(b) Sabendo ainda que $f^{(iv)}(x) = 78$, para todo $x \in \mathbb{R}$, determine a expressão analítica de f.

7. Considere $a \neq 0$ e uma função g para a qual

$$g(0) = a, \quad g(g(0)) = 2a, \quad g(g(g(0))) = b.$$

(a) Determine o polinómio interpolador de g no conjunto de nós $\{0, a, 2a\}$.

(b) Considere b de forma a que g tenha um ponto fixo em $2a$. Mostre que numa vizinhança desse ponto fixo o polinómio interpolador p_2 é contractivo. Determine o outro ponto fixo de p_2 e verifique que num intervalo que inclua esse ponto o polinómio não é contractivo.

8. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f:

x	-1	1	4
$f(x)$	2	-2	-8

Sabendo que f é um polinómio e que:

$$f[-1,1,2]=4, \qquad f[-1,1,2,4,x]=3 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1,2,4\}$$

determine a forma de f.

R:

$$P_2(x) = 2 - 2(x+1) + 4\,(x+1)\,(x-1)$$
$$P_3(x) = P_2(x) - 2\,(x+1)\,(x-1)\,(x-2)$$
$$f(x) = P_4(x) = P_3(x) + 3\,(x+1)\,(x-1)\,(x-2)\,(x-4)$$

9. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	-1	0	1	2
f_i	1	1	1	2

(a) Usando a fórmula de Newton com diferenças divididas, construa o polinómio interpolador de f de grau menor ou igual a 3.

(b) Sabendo que $f'''(x) = 4x - 1$, utilize a alínea anterior para determinar a expressão exacta de f.