Matemática Computacional

Exercícios - Ficha 5

1° Semestre — 2015/16

1. Considere o seguinte sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} x^3 + 5y - 2z &= 0 \\ e^y - z^2 &= 1 \\ -x^2 + y + z &= 0 \end{cases}$$

Para aproximar uma solução deste sistema pretende-se utilizar o método de Newton. Tomando como aproximação inicial o vector $x^{(0)} = (c, 0, 0)$, onde c é um certo número real, para obter a aproximação $x^{(1)}$ somos levados a resolver um sistema linear com matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3c^2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2c & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre como se obteve esta matriz e calcule o segundo membro do sistema.

(b) No caso de $c = 1$ resolva o sistema pelo método de eliminação de Gauss e obtenha a primeira iterada $x^{(1)}$ do método de Newton.

(c) No caso de se aplicar o método de Jacobi para resolver o sistema linear, diga para que valores de c está garantida a condição necessária e suficiente de convergência do método.

R: (b) $x^{(1)} = (0, 0, -1)$. (c) $|c| > 4/3$.

2. Considere o sistema não-linear

$$\begin{cases} 2x - \cos(x+y) = 2 \\ 3y - \sin(x+y) = 6 \end{cases}$$

Inicializando com $x^{(0)} = (1, 1)$ calcule duas iterações pelo método de Newton.

3. Pretende-se resolver, pelo método de Newton, o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} e^x - 3 &= 0 \\ 3\,y + 4\,z &= 3 \\ 2\,x^2 + 2\,x + 2\,z &= 1 \end{cases}$$

(a) Tomando como aproximação inicial $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 2)$, ao efectuar uma iteração pelo método de Newton, somos conduzidos a resolver um certo sistema de equações lineares. Qual?

(b) Resolva o sistema de equações lineares obtido na alínea anterior pelo método de Gauss-Seidel, considerando como aproximação inicial o vector nulo e efectuando duas iterações.

4. Pretende-se resolver o seguinte sistema de equações não-lineares pelo método de Newton

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1^2 - x_2^2 + x_3^3 & = & -3 \\ 4\,x_1 + x_2^3 + x_3 & = & 2 \\ x_1\,x_3 + 5\,x_2 & = & 3 \end{array}\right.$$

usando como aproximação inicial o vector $x^{(0)} = (1, 0, -1)$.

(a) Mostre que, para se obter $x^{(1)}$, se deve resolver um sistema linear da forma $Av = h$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

e v e h são vectores de $\mathbb{R}^3$. Calcule h.

(b) Transforme o sistema linear considerado num sistema equivalente, de modo a que fique garantida a convergência do método de Gauss-Seidel. Depois, tomando como aproximação inicial $v^{(0)} = (-1, -1, -1)$, aplique este método até obter a solução exacta do sistema linear.

(c) Obtenha o valor de $x^{(1)}$, a primeira iterada do método de Newton.

5. Considere o método de Newton aplicado à resolução do sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} (x_1^4 - x_3^2)\,x_2 + 1 & = & 0 \\ (x_1^2 + x_3 + 8\,b)x_2 & = & 3 \\ (3 - 3\,x_3^2)\,x_2 + 1/8 & = & 0 \end{array}\right.$$

(a) Verifique que, se $x^{(0)} = (1, b, -1)$, então $x^{(1)} = x^{(0)} - h$, sendo h a solução do sistema linear $Ah = b$, em que:

$$A = \begin{bmatrix} 4\,b & 0 & 2\,b \\ 2\,b & 8\,b & b \\ 0 & 0 & 6\,b \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 8\,b^2 - 3 \\ 1/8 \end{bmatrix}$$

(b) Justifique que o método de Jacobi, aplicado a $Ah = b$, converge qualquer que seja $h^{(0)}$, se e só se $b \neq 0$. Pode garantir que $h^{(3)}$ seja a solução exacta do sistema $Ah = b$?