Matemática Computacional

Exercícios - Ficha 4

1º Semestre — 2015/16

1. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}$$
e considere o sistema $Ax = b$, com $b = [1 \quad 10^{-6}]^T$, que tem por solução exacta $x = [1 \quad 1]^T$.

   (a) Determine $\text{cond}(A)$ na $|| \cdot ||_\infty$.

   (b) Considere o sistema $A\tilde{x} = \tilde{b}$, onde $\tilde{b} = [1 + \epsilon \quad 10^{-6}]^\top$. Obtenha $\|\delta_b\|_\infty$ e $\|\delta_x\|_\infty$ e comente.

   (c) Considere ainda $\tilde{b} = [1 \quad 2 \times 10^{-6}]^\top$. Obtenha $\|\delta_b\|_\infty$ e $\|\delta_x\|_\infty$ e comente.

2. Seja A a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ com inversa } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
onde $a \in \mathbb{R}$.

   (a) Calcule os números de condição associados à norma $\| \cdot \|_\infty$ e à norma $\| \cdot \|_1$.

   (b) Mostre que $\text{cond}_1(A) = \text{cond}_\infty(A)$.

   (c) Seja $|a| > 1$. Suponhamos que, ao resolver o sistema $Ax = b$, o segundo membro é afectado de um erro tal que $\|\delta_b\|_\infty \leq \epsilon$. Determine um majorante de $\|\delta_x\|_\infty$.

   (d) Para que valores de a o sistema é mal condicionado?

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 0.00005 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine o número de condição da matriz A na norma $\| \cdot \|_1$;

   (b) Ao resolver um sistema com a matriz A, sabendo-se que o segundo membro b é afectado por um erro cuja norma, em termos relativos, satisfaz $\|\delta_b\|_1 \leq \epsilon$, determine um majorante da norma correspondente do erro relativo da solução.

4. Considere um sistema de duas equações na forma geral

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 = b_2 \end{cases}$$

onde $a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} \neq 0$.

(a) Mostre que os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel convergem para qualquer aproximação inicial $x^{(0)}$ se e só se $|m| < 1$, onde $m = \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$.

(b) No caso do método de Jacobi, mostre que se a matriz do sistema tiver a diagonal estritamente dominante por linhas, se verifica

$$\|x^{(k+1)} - x\|_\infty \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty$$

onde x é a solução exacta do sistema, $x^{(k)}$ é a k-ésima iterada e $\alpha = \max(\frac{|a_{12}|}{|a_{11}|}, \frac{|a_{21}|}{|a_{22}|})$.

(c) Considere o sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Efectue a primeira iteração do método de Jacobi, partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = (2, 1)$. Com base na alínea anterior determine um majorante para o erro do resultado obtido.

(d) Nas condições da alínea anterior, quantas iterações do método de Jacobi são necessárias para garantir que seja satisfeita a condição $\|x^{(k)} - x\|_\infty < 0.001$?

5. Considere o sistema $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 8 \\ 2 & -7 & -10 \\ 10 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ -23 \\ 34 \end{bmatrix}$$

(a) Será possível reordenar as linhas do sistema de modo que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel sejam convergentes? Justifique.

(b) Escreva o sistema na forma iterativa e calcule $x^{(2)}$, considerando o método de Gauss-Seidel com $x^{(0)} = (1, 1, 1)$.

(c) Determine um majorante para $\|x - x^{(2)}\|_\infty$.

6. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x + z &= 2 \\ -x + y &= 0 \\ x + 2y - 3z &= 0 \end{cases}$$

(a) Prove que o método de Jacobi converge para a solução exacta deste problema, qualquer que seja a aproximação inicial.

(b) Mostre que, no caso de se usar o método de Gauss-Seidel, não está garantida a convergência para qualquer aproximação inicial. Indique uma aproximação inicial $x^{(0)}$ (diferente da solução exacta), tal que a sucessão $\{x^{(k)}\}$ seja convergente; e uma aproximação inicial $x^{(0)}$, partindo da qual o método divirja.

7. Considere a matriz da forma

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & \alpha \\ \beta & -\beta & -\alpha \\ \beta & -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

onde $0 < \beta < \alpha$.

(a) Mostre que, qualquer que seja a iterada inicial, o método de Jacobi converge e o método de Gauss-Seidel não converge para a solução de um sistema $Ax = b$.

(b) Considere $\beta = 1,\ \alpha = 2$ e $b = (0, 0, 0)$. A solução única do sistema $Ax = b$ será $x = (0, 0, 0)$.

i. Mostre que, qualquer que seja $x^{(0)}$, ao fim de três iterações obtemos a solução exacta pelo método de Jacobi. (Verifique que a matriz C associada ao método de Jacobi satisfaz $C_J^3 = 0$.)

ii. Mostre que se começar com $x^{(0)} = (0, 2, 1)$, aplicando o método de Gauss-Seidel, obtém $x^{(1)} = (0, -2, -1)$, $x^{(2)} = (0, 2, 1)$, $x^{(3)} = (0, -2, -1), \ldots$. Verifique que $(0, 2, 1)$ é um vector próprio associado ao valor próprio -1 da matriz C (do método de Gauss-Seidel) e não é solução do sistema.

8. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 12 \\ 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \end{cases}$$

(a) Reordene as linhas de modo a que matriz do novo sistema tenha a diagonal estritamente dominante.

(b) Aplique o método de Jacobi ao novo sistema e efectue 4 iterações. Calcule um majorante para o erro na 4ª iterada. Considere $\mathbf{x}^{(0)} = [-4, -4, -4]^T$.

(c) Nas condições da alínea anterior, quantas iterações do método de Jacobi são necessárias para garantir que seja satisfeita a condição $||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}||_\infty < 0.001$?

(d) Aplique o método de Gauss-Seidel até que $||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}||_\infty < 10^{-2}$. Conclua sobre o erro da iterada $\mathbf{x}^{(k)}$.