Matemática Computacional

Exercícios - Ficha 3

1° Semestre — 2015/16

1. Considere a equação
$$x^3 - x = \frac{1}{4}\cos(x).$$

   (a) Com base nos teoremas sobre localização de raízes mostre que esta equação tem no máximo 3 raízes reais.

   (b) Mostre que a equação considerada tem duas raízes reais z_1 e z_2 situadas, respectivamente, nos intervalos $[-0.5, -0.2]$ e $[1.0, 1.5]$, e que existe apenas uma raiz em cada um destes intervalos.

   (c) Considere as funcões iteradoras
$$g_1(x) = x^3 - \frac{1}{4}\cos(x) \qquad g_2(x) = (x + \frac{1}{4}\cos(x))^{1/3}.$$
   Se partirmos da aproximação inicial $x_0 = 0.5$ e aplicarmos cada uma das funcões iteradoras obtemos sucessões que convergem para cada uma das raízes consideradas na alínea anterior. Diga qual das funções corresponde a cada uma das raízes e justifique, com base no teorema do ponto fixo.

   (d) Indique uma nova função iteradora que permita obter aproximações de cada uma das raízes consideradas, de tal modo que a convergência das respectivas sucessões seja quadrática.

2. Considere a função real
$$f(x) = 2x - \cos(x).$$

   (a) Mostre que a equação $f(x) = 0$ possui uma só raiz α no intervalo $(0, \pi/4)$ e calcule-a com erro inferior a 0.25. Justifique.

   (b) Mostre que o processo iterativo
$$x_{n+1} = \frac{\cos(x_n)}{2} \qquad n = 0, 1, \ldots$$
   converge para o número α, independentemente da escolha que fizer de $x_0 \in (0, \pi/4)$. Dê uma estimativa do coeficiente assimptótico de convergência. A convergência é monótona? Justifique.

   (c) Faça $x_0 = \pi/8$. Calcule um majorante para o erro absoluto de x_{16}.

3. Pretende-se determinar, utilizando o método de Newton, a maior das duas raízes positivas da equação
$$-x^3 + 14x - 1 - e^x = 0.$$
   (a) Mostre que se x_0 for escolhido no intervalo [2.6,3], estão asseguradas as condições de convergência do método.
   (b) Efectue três iterações do método de Newton e determine um majorante do erro de x_3.
   (c) Sem efectuar iterações, calcule um majorante para o erro da quinta iterada.

4. Utilize o método de Newton para aproximar a (única) raiz da equação
$$x^3 - \cos x = 1,$$
no intervalo $[1, 2]$. Escolha o valor $x_0 = 1$ para iterada inicial e calcule as iteradas x_1 e x_2. Quantas iteradas teria ainda que calcular para obter uma aproximação da raiz com erro inferior a 10^{-9}?

5. Considere o seguinte método para obter um valor aproximado de $\sqrt{10}$:
   (a) O método de Newton aplicado à função $f_1(x) = x^2 - 10$. Mostre que se escolher $x_0 = 4$ então o método converge e a convergência é da ordem 2. Calcule 3 iteradas e indique um majorante para o erro de x_3. O que acontece se escolher $x_0 > 4$?
   (b) O método de Newton aplicado a função $f_2(x) = x^{-1/2}(x^2 - 10)$. Admitindo que o método converge mostre que a ordem de convergência é 3.

6. Mostre que a equação $\ln(x) - (x-2)^2 = 0$ tem 2 e só 2 raízes reais distintas e indique, para cada uma delas, um intervalo (de comprimento não superior a 2) que a contenha (sem conter a outra). Se pretendesse utilizar o método de Newton para calcular a raiz mais pequena, diga, justificando, qual (ou quais) dos seguintes valores poderia utilizar como aproximação inicial: $x_0 = 2.1$, $x_0 = 2.5$ ou $x_0 = 1.4$? Mostre que para o valor x_0 que escolheu estão garantidas as condições de convergência do método e efectue uma iteração.

7. Considere a equação
$$x \tan(x) - 1 = 0.$$
Aplicando o método da secante, obtenha as três primeiras iteradas para o cálculo da raiz situada no intervalo $[0.8, 0.9]$. Determine um majorante do erro do resultado obtido.