Matemática Computacional

Exercícios - Ficha 2

1° Semestre — 2015/16

1. Considere a equação $\sin x - e^{-x} = 0$.

   (a) Prove que esta equação tem uma e uma só raiz $z \in [0.5, 0.7]$.

   (b) Efectue três iterações pelo método da bissecção e indique um majorante do erro dessa aproximação.

   (c) Determine o número m de iterações necessárias para garantir $|z - x_m| < 10^{-6}$.

2. Considere a função de variável real
$$g(x) = \frac{1 + e^x + x^3}{14}$$
e a sucessão numérica $\{x_m\}$ definida por $x_{m+1} = g(x_m), m = 0, 1, ...$

   (a) Mostre que esta sucessão tem limite $z \in [0, 1]$, independente de $x_0 \in [0, 1]$.

   (b) Partindo de $x_0 = 0$, calcule x_5 e determine um majorante de $|z - x_5|$.

   (c) Verifique que a função g tem um (único) ponto fixo no intervalo $[2, 3]$. Poderá usar, para a sua determinação, o método iterativo baseado na função iteradora g?

3. Considere a equação
$$e^x - 4x^2 = 0 \tag{1}$$
que tem apenas três raízes reais: $z_1 < z_2 < z_3$, tal que $z_1 \in [-1, 0]$, $z_2 \in [0, 1]$ e $z_3 \in [4, 5]$.

   (a) Para aproximar as raízes positivas da equação (1), considere-se o método do ponto fixo com função iteradora
$$g(x) = \frac{1}{2}\, e^{x/2}$$

      i. Mostre que z_2 e z_3 são pontos fixos de g.

      ii. Mostre que o método iterativo associado a g converge para z_2, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [0, 1]$.

   (b) Mostre que não é possível usar esse método para obter uma aproximação da raiz $z_3 \in [4, 5]$.

(c) Determine uma função iteradora tal que o método do ponto fixo associado convirja para a raiz negativa da equação.

4. Seja g uma função contínua tal que $g(a) = b$ e $g(b) = a$.

   (a) Mostre que existe pelo menos um ponto fixo de g em $[a, b]$.

   (b) Mostre que se $g \in C^1([a, b])$, então a derivada de g toma o valor -1 em algum ponto desse intervalo. Poderá aplicar o teorema do ponto fixo à função g no intervalo $[a, b]$?

5. Considere uma sucessão de números reais, definida do seguinte modo:

$$x_0 = 1, \qquad x_{k+1} = 1 - \frac{1}{b\,x_k}, \qquad (k = 0, 1, \dots)$$

   onde b é um número real dado.

   (a) Com base no teorema do ponto fixo, mostre que, se $b > 4$ esta sucessão converge e que todos os seus termos estão compreendidos no intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$.

   (b) Seja $b = \dfrac{25}{4}$. Através da definição de ponto fixo, calcule $z = \lim_{k\to\infty} x_k$.

   (c) Para o mesmo valor de b, mostre que todos os termos da sucessão pertencem ao intervalo $[\frac{4}{5}, 1]$ e que se verifica

$$|z - x_{k+1}| \le \frac{4}{75}\left(\frac{1}{4}\right)^k \qquad (k = 0, 1, \dots)$$

6. Considere a equação

$$3x^2 - e^x = 0$$

   (a) Localize graficamente as raízes da equação e indique intervalos de comprimento unitário que as contenham.

   (b) Considere as seguintes sucessões

$$(S_1) \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{e^{x_n}}{3}} \qquad\qquad (S_2) \quad x_{n+1} = \ln(3x_n^2).$$

   Mostre que é possível obter aproximações das raízes positivas da equação usando, para cada raiz, uma destas sucessões. Indique, em cada caso, um intervalo onde poderá escolher a iterada inicial x_0.

   (c) Efectue duas iterações usando a sucessão S_1 com $x_0 = 1$. Dê um majorante para o erro da aproximação obtida.

   (d) Será possível usar a sucessão S_1 para aproximar a maior raiz positiva da equação? E poderá usar a sucessão S_2 para aproximar a menor raiz positiva da equação?