LMAC/MMA/MEIC
Análise Numérica

9^a **Aula Prática – 18 de Novembro de 2016**

1. Considere a seguinte família de problemas de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & 0 \leq x \leq 1 \\ \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

a) Mostre que, no caso de $f(x, y) = y + \sin(x)y + x^3$ o problema tem solução única. Obtenha uma aproximação de $y(0.2)$ aplicando o método de Euler implícito com $h = 0.1$. Considere $y_0 = 1$.

b) Considere agora $f(x, y) = y + \sin(x)/y^4 + x^3$. Poderá garantir existência e unicidade de solução para qualquer valor inicial y_0? Obtenha uma aproximação de $y(0.2)$ aplicando o método de Euler implícito com $h = 0.1$. Considere $y_0 = 1$ e use o método de Euler explícito para prever o valor de y_{n+1} no membro da direita.

2. Considere o seguinte problema de valores iniciais para uma equação diferencial de segunda ordem

$$\begin{cases} y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Determine o valor aproximado de $y(1)$, pelo método de Taylor de ordem 2 com $h = 0.5$.

3. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y), & 0 \leq x \leq 1 \\ \\ y(0) = \alpha, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e lipschitziana na segunda variável. Considere o seguinte esquema numérico para a aproximação de (1)

$$y_{j+1} = y_j + h[f(x_j, y_j) + g(h)], \qquad j = 0, \ldots, N, \qquad y_0 = \alpha, \tag{2}$$

onde $x_j = jh, j = 0, \ldots, N$ $(h = \frac{1}{N})$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$ é tal que $\lim_{h \to 0} g(h) = 0$.

a) Mostre que o método (2) é consistente e convergente. O que é que pode dizer sobre a sua ordem de convergência?

b) Seja $f(x, y) = x \sin y$, $\alpha = 3$, $g(h) = h$ e $h = 0.2$. Obtenha uma aproximação de $y(1)$ pelo método (2). Determine um majorante para o erro cometido.

4. Determine todos os valores do parâmetro real $b, b \neq 0$, para os quais o método multipasso linear

$$y_{n+3} + (2b - 3)(y_{n+2} - y_{n+1}) - y_n = h\, b \left(f(t_{n+2}, y_{n+2}) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right), \quad n \geq 0$$

é zero-estável. Mostre que existe um valor de b tal que a ordem de consistência do método é 4. O método será convergente para esse valor de b? Mostre ainda que se o método for zero-estável então a sua ordem não pode ser superior a dois.

5. Seja $n \geq 0$ fixo e considere o polinómio interpolador $p_k \in \mathcal{P}_k, k \geq 1$, tal que

$$p_k(t_{n+k-j}) = y_{n+k-j}\,, \qquad j = 0, \ldots, k\,,$$

em que $t_{n+k-j+1} - t_{n+k-j} = h,\ \forall\, j = 1, \ldots, k$. Os métodos multipassos BDF (*backward differentiation formulæ*) a k passos são definidos pela condição

$$\left[\frac{d}{dt}\,p_k(t)\right]_{t=t_{n+k}} = f(t_{n+k}, y_{n+k})\,, \quad k = 1, 2, \ldots\,.$$

Determine os métodos BDF a k passos com $k = 1, 2, 3$. Analise a consistência e zero-estabilidade dos métodos obtidos.

6. Considere o seguinte método multipasso linear (método do ponto médio)

$$y_{n+2} - y_n = 2hf(t_{n+1}, y_{n+1})\,, \quad n \geq 0\,.$$

a) Mostre que a ordem de consistência do método é igual a dois e que o método é zero-estável.

b) Analise, para $h > 0$ fixo, o comportamento do método quando aplicado ao problema

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t)\,, \quad t > 0 \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$