LMAC/MMA/MEIC
Análise Numérica

7^a **Aula Prática – 4 de Novembro de 2016**

1. Considere o polinómio $q_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ e a seguinte matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

a) Mostre que $q_n(\lambda) = p_A(\lambda)$. A matriz A diz-se *matriz companheira* do polinómio q_n.

b) Prove que toda a raiz z do polinómio q_n satisfaz

$$|z| \leq 1 \qquad \text{ou} \qquad |z + a_{n-1}| \leq |a_0| + \ldots |a_{n-2}|.$$

c) Prove que, para as raízes de q_n, também se verifica

$$|z| \leq |a_0| \qquad \text{ou} \qquad |z| \leq 1 + |a_j|, \quad j = 1, \ldots, n-2 \qquad \text{ou} \qquad |z + a_{n-1}| \leq 1.$$

d) Localize as raízes das seguintes equações polinomiais

$$\textbf{i.}\ r^{10} + 8r^9 + 1 = 0 \qquad\qquad \textbf{ii.}\ r^6 - 4r^5 + r^4 - r^3 + r^2 - r + 1 = 0.$$

2. Considere a matriz complexa

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1+i \\ 0 & 7 & 0 & -i \\ 1 & 0 & -5 & 1-i \\ 1-i & i & 1+i & 2 \end{bmatrix}.$$

Localize, pelo teorema de Gerschgorin, os valores próprios de A.

3. Considere as matrizes A e E dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 101 & -90 \\ 110 & -98 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que a matriz A não é normal mas é semelhante a uma matriz diagonal. Determine a matriz não singular $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ e as colunas da matriz P são os vectores próprios unitários associados aos valores próprios λ_1, λ_2 da matriz A.

b) Seja $A(\varepsilon) = A + \varepsilon E$, $\varepsilon > 0$. Analise o condicionamento do problema de valores próprios de A e calcule os números de condição dos valores próprios λ_1 e λ_2 de A.

c) Seja $\varepsilon = 0.001$. Determine os valores próprios de $A(\varepsilon)$. Calcule $|\lambda_j(\varepsilon) - \lambda_j|$ e compare com as estimativas obtidas na alínea anterior.

d) Aproxime o valor próprio dominante λ_1 e o vector próprio associado u_1 pelo método das potências. Considere $q^{(0)} = [\sqrt{2}/2 \ \ \sqrt{2}/2]^T$ e efectue quatro iteradas. Estime o erro.

4. Considere a seguinte matriz quadrada não diagonalizável de ordem N

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Analise a estabilidade do problema de valores próprios da matriz A relacionando o único valor próprio de A, de multiplicidade algébrica N, com os valores próprios da matriz $A(\varepsilon) = A + \varepsilon\, E$, em que

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$