LMAC/MMA/MEIC
Análise Numérica

6^a **Aula Prática – 28 de Outubro de 2016**

1. Seja $f(x) = x^4\sqrt{1-x^2}$ e considere o integral

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx\,.$$

a) Aproxime $I(f)$ pela quadratura de Gauss–Chebyshev com 3 pontos.

b) Prove que o erro cometido na alínea anterior é igual a $-\frac{\pi}{32}$. Com base nos resultados obtidos, determine o valor exacto do integral $I(f)$.

2. Considere o integral $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ e para a sua aproximação numérica uma quadratura de Gauss-Lobatto. As quadraturas de Gauss-Lobatto, $I_n(f), n \geq 1$, definem-se por

$$I_n(f) = A_0 f(-1) + \sum_{j=1}^{n-1} A_j f(x_j) + A_n f(1)\,,$$

onde os nós interiores $x_1, \ldots, x_{n-1} \in (-1,1)$ são os zeros (reais e distintos) do polinómio P_n' de grau $n-1$. (P_n é o polinómio de Legendre de grau n). Portanto as quadraturas de Gauss-Lobatto $I_n(f)$ são fórmulas de quadratura de Gauss em que os nós $x_0 = -1$ e $x_n = 1$ são fixos.

Determine a quadratura de Gauss-Lobatto com 4 pontos, i.e. calcule x_1, x_2, A_0, A_1, A_2 e A_3. Determine o grau de precisão da quadratura obtida.

3. Considere a quadratura de Gauss-Hermite

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j) \approx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx = I(f)\,.$$

a) Determine os pesos A_j e os nodos x_j associados às quadraturas de Gauss-Hermite com $n=1$ e $n=2$.

b) Aproxime o integral $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x\,dx$ pela quadratura de Gauss-Hermite com 2 e 3 pontos.

4. Seja $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ uma matriz hermiteana e sejam $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_N$ os valores próprios (reais) de A. Define-se *quociente de Rayleigh* $\mathcal{R}(x)$ por

$$\mathcal{R}(x) = \frac{(Ax,x)}{(x,x)}, \qquad x \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}\,.$$

Mostre que

$$\max_{x\in\mathbb{C}^N\setminus\{0\}} \mathcal{R}(x) = \lambda_1, \qquad \min_{x\in\mathbb{C}^N\setminus\{0\}} \mathcal{R}(x) = \lambda_N.$$

5. Seja $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ uma matriz quadrada, com os valores próprios $\lambda_j, j = 1, \ldots, N$, e $\|\cdot\|_2$ a norma matricial induzida pela norma euclidiana vectorial.

a) Prove que

$$\|A\|_2 = \sqrt{r_\sigma(A^*A)} = \sqrt{r_\sigma(AA^*)}\,.$$

b) Seja $U \in \mathbb{C}^{N\times N}$ uma matriz unitária, i.e. $U^* = U^{-1}$. Prove que

$$\|UA\|_2 = \|AU\|_2 = \|A\|_2\,.$$