LMAC/MMA/MEIC
Análise Numérica

4^a **Aula Prática – 14 de Outubro de 2016**

1. Determine a melhor aproximação uniforme de $f(x) = |x|$ em $\mathcal{P}_2[-2, 2]$.

2. Mostre que a melhor aproximação uniforme de $f(x) = |x|$ em $\mathcal{P}_3[-1, 1]$ é dada por $q^*(x) = x^2 + \frac{1}{8}$.

3. Considere os seguintes problemas de minimização

$$\min_{\alpha\in\mathbb{R}} \max_{x\in[0,1]} |f(x) - \alpha x|, \qquad \min_{\alpha\in\mathbb{R}} \left(\int_0^1 \big(f(x) - \alpha x\big)^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Resolva os problemas com $f(x) = 1$ e $f(x) = x^2 - 1$.

4. Determine a aproximação "quase minimax" de $f(x) = e^x$ em $P_1[0, 1]$, i.e. calcule o polinómio interpolador de f nos nós de Chebyshev. Compare com a melhor aproximação uniforme.

5. Seja

$$\mathcal{T}_n[-\pi, \pi] = \left\{ p \in C[-\pi, \pi] \,:\, p(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} \Big[a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx) \Big] ,\ a_j, b_j \in \mathbb{R} \right\},$$

o espaço de todos os polinómios trigonométricos de grau $\leq n$ em $[-\pi, \pi]$.

a) Prove que a melhor aproximação mínimos quadrados de $f \in C[-\pi, \pi]$ em $\mathcal{T}_n[-\pi, \pi]$ é dada por

$$p_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} \Big[a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx) \Big],$$

onde

$$\begin{cases} a_j = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(jx)\, dx, & j = 0, 1, \dots, \\[2ex] b_j = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(jx)\, dx, & j = 1, 2, \dots . \end{cases}$$

b) Determine a melhor aproximação mínimos quadrados de $f(x) = |x|$ em $\mathcal{T}_n[-\pi, \pi]$.

6. Considere os polinómios de Chebyshev, definidos por $T_k(x) = \cos(k \arccos x), k = 0, 1 \dots$.

a) Prove que

$$(T_k, T_j)_w := \int_{-1}^{1} \frac{T_k(x)\, T_j(x)}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ \pi, & j = k = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & j = k > 0 \end{cases},$$

ou seja, mostre que os polinómios são ortogonais com respeito ao produto interno $(\cdot, \cdot)_w$.

b) Prove que os polinómios satisfazem a fórmula recursiva

$$T_{k+1}(x) = 2\, x\, T_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k \geq 1, \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$