LMAC/MMA/MEIC
Análise Numérica

3^a **Aula Prática – 7 de Outubro de 2016**

1. Seja p_2 o polinómio interpolador de f nos pontos distintos x_0, x_1 e x_2.

a) Pela fórmula de erro de interpolação, tem-se

$$f'(x) - p_2'(x) = f[x_0, x_1, x_2, x, x]\, W_3(x) + f[x_0, x_1, x_2, x]\, W_3'(x)\,, \qquad \text{onde} \qquad W_3(x) = (x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,.$$

Como é que deve escolher os pontos x_0, x_1 e x_2 por forma a garantir que $W_3'(x) = 0$? Apresente a fórmula de diferenciação numérica que corresponde a essa escolha.

b) Obtenha a fórmula de diferenças centradas para a segunda derivada de f usando o polinómio p_2. Mostre que

$$f''(x) - p_2''(x) = -\,\frac{f^{(4)}(\xi)}{12}\, h^2\,, \qquad \xi \in [x_0, x_2]\,.$$

2. Se a função f for suficientemente regular numa vizinhança do ponto z, podemos escrever

$$f''(z) = \frac{f(z+h) - 2f(z) + f(z-h)}{h^2} + e_2 h^2 + e_4 h^4 + \ldots\,,$$

onde os e_j's não dependem de h. Utilize esta expressão e o método de extrapolação de Richardson para deduzir uma aproximação de ordem $\mathcal{O}(h^4)$ para $f''(z)$.

3. Um subconjunto K de um espaço vectorial V diz-se *convexo* se

$$\forall\, u, v \in K \quad \Longrightarrow \quad \lambda\, u + (1-\lambda)\, v \in K \quad \forall\, \lambda \in [0,1]\,.$$

Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço normado, $U \subset V$ e K o conjunto de todas as melhores aproximações de $f \in V$ em U, em relação à norma $\|\cdot\|$. Mostre que K é um conjunto convexo.

4. Seja V um espaço vectorial, munido de um produto interno $(\cdot,\cdot)$ e seja $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$ a norma induzida pelo produto interno.

a) Prove a desigualdade de Cauchy–Schwarz

$$|(u,v)| \le \|u\|\,\|v\| \qquad \forall\, u, v \in V\,,$$

onde a igualdade se verifica se e só se u e v forem linearmente dependentes.

b) Mostre que

$$\|u + v\| \le \|u\| + \|v\| \qquad \forall\, u, v \in V\,.$$

5. Resolva o seguinte problema de minimização

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}}\, \max_{x \in [0,1]} |f(x) - \alpha x|\,,$$

com $f(x) = 1$ e $f(x) = x^2 - 1$.

6. Determine a melhor aproximação uniforme de $f(x) = e^x$ em $\mathcal{P}_1[0,1] \subset C([0,1])$ em que $\mathcal{P}_1[0,1]$ é o espaço de todos os polinómios de grau ≤ 1 em $[0,1]$.