LMAC/MMA/MEIC
Análise Numérica

1^a **Aula Prática – 23 de Setembro de 2016**

1. Seja p_1 o polinómio interpolador de Lagrange de uma função $f \in C^2([a,b])$ em dois pontos distintos x_0 e x_1 tais que $a \leq x_0 < x_1 \leq b$.

a) Mostre, para todo o $x \in [a,b]$, a seguinte estimativa

$$|f'(x) - p_1'(x)| \leq \frac{(x-x_0)^2 + (x-x_1)^2}{2(x_1-x_0)} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \, .$$

b) Seja $x_0 = a$ e $x_1 = b$. Verifique que

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_1(x)| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \, ,$$

$$\max_{x\in[a,b]} |f'(x) - p_1'(x)| \leq \frac{b-a}{2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \, .$$

2. Seja $f \in C^1([-1,1])$ e considere o conjunto de dados

$$x_0 = -1 \, , \quad x_1 = 0 \, , \quad x_2 = 1 \, , \qquad f_0 = f(x_0) = 0 \, , \quad f_1' = f'(x_1) = c \, , \quad f_2 = f(x_2) = 2 \, ,$$

com $c \in \mathbb{R}$. Analise a existência e unicidade de um polinómio interpolador q_2, de grau ≤ 2, tal que

$$q_2(x_0) = f_0 \, , \qquad q_2'(x_1) = f_1' \, , \qquad q_2(x_2) = f_2 \, .$$

3. Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$ pontos igualmente espaçados em $[a,b]$, tais que $x_0 = a, x_j = x_0 + jh, j = 1, \ldots, n$ e $h = \frac{b-a}{n}$, e seja p_n o polinómio interpolador de f nesses $n+1$ pontos distintos. Mostre que

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{4\,(n+1)} \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \, .$$

4. Considere uma partição do intervalo $[a,b]$ em N subintervalos $I_j = [z_j, z_{j+1}], j = 0, \ldots, N-1$, tais que $[a,b] = \cup_{j=0}^{N-1} I_j$. Seja $h = \max_{0\leq j\leq N-1} h_j$, onde $h_j = z_{j+1} - z_j$.

Em cada I_j, considere $k+1, k \geq 1$, pontos igualmente espaçados $x_0^j, \ldots, x_k^j$, com $x_0^j = z_j$ e $x_k^j = z_{j+1}$, e a interpolação de Lagrange de uma função $f \in C[a,b]$ nesses pontos. Seja p_k^h a função contínua cuja restrição a I_j coincide com o polinómio interpolador de Lagrange de grau $\leq k$ de f em I_j.

Mostre que, se $f \in C^{k+1}([a,b])$, então

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_k^h(x)| \leq c\, h^{k+1} \max_{x\in[a,b]} |f^{(k+1)}(x)| \, .$$

5. Determine o polinómio interpolador de Hermite de grau ≤ 5 da função $f(x) = \sin \pi x$ usando os pontos $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$.

6. Pretende-se construir um polinómio interpolador de Hermite H_3 (de grau ≤ 3) da função $f(x) = 4x^4$ no intervalo $[-1, 1]$.

a) Considere os pontos $x_0 = -1$ e $x_1 = 1$ e determine o polinómio H_3 pelas diferenças divididas de Newton. Estime o erro $\|f - H_3\|_\infty := \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - H_3(x)|$.

b) Determine os pontos de interpolação x_0 e x_1 $(-1 < x_0 < 0 < x_1 < 1)$ de tal modo a que o erro $\|f - H_3\|_\infty$ seja o menor possível. Suponha que $x_0 = -x_1$. Determine o polinómio interpolador H_3 nesses pontos.

7. Seja $f \in C[a, b]$ uma função dada e sejam $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, $n + 1$ nós distintos de $[a, b]$ tais que $x_0 = a$ e $x_n = b$. Considere ainda uma função s cuja expressão no intervalo $I_j = [x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, n-1$, é

$$s_j(x) = \frac{a_{j+1} - a_j}{2(x_{j+1} - x_j)} (x - x_j)^2 + a_j (x - x_j) + f_j\,, \quad x \in [x_j, x_{j+1}]\,, \quad j = 0, \ldots, n-1\,,$$

onde $f_j = f(x_j)$, $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \ldots, n$, e os a_j satisfazem a equação

$$a_j = \frac{2\,(f_j - f_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} - a_{j-1}\,, \quad j = 1, \ldots, n\,.$$

Verifique que s é um spline quadrático interpolador de f nos nós $x_0, \ldots, x_n$. Quantas condições adicionais são necessárias para que o spline s fique determinado de forma única no intervalo $[a, b]$?