LMAC/MMA/MEIC
Análise Numérica

13^a **Aula Prática – 16 de Dezembro de 2016**

1. Os valores próprios da matriz tridiagonal

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$$

são dados por

$$\lambda_j(h) = 2\,(1 - \cos jh\pi)\,, \qquad j = 1, \dots, n-1\ , \quad h = \frac{1}{n}\,.$$

a) Mostre que

$$r_\sigma(A) = O(1)\,, \qquad r_\sigma = (A^{-1}) = O(h^{-2})\,.$$

b) Prove que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\lambda_j(h)}{h^2} = j^2\pi^2\,.$$

2. Considere o problema com valores na fronteira

$$\begin{cases} y''(x) - q(x)y(x) = r(x), & a < x < b \\ y(a) = \alpha_1, \qquad y(b) = \alpha_2\,, & \end{cases}$$

e para a sua aproximação numérica o seguinte método das diferenças finitas (de Numerov)

$$\begin{aligned} \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} - \frac{1}{12}\Big(q(x_{j+1})y_{j+1} + 10q(x_j)y_j + q(x_{j-1})y_{j-1}\Big) = \\ = \frac{1}{12}\Big(r(x_{j+1}) + 10r(x_j) + r(x_{j-1})\Big), \quad j = 1, 2, \dots, n-1\,, \end{aligned} \tag{1}$$

onde $h = \frac{b-a}{n}$ e $x_j = a + jh, j = 0, \dots, n$. Suponha que $q(x) \geq Q_* > 0, \forall x \in [a, b]$, $r, q \in C^4[a, b]$ e $y \in C^6[a, b]$.

a) Mostre que o método (1) é de ordem 4.

b) Escreva (1) na forma $\mathbf{Ay} = \mathbf{b}$, com $\mathbf{y} = [y_1\ y_2\ \dots\ y_{n-1}]^T$. Prove que a matriz $\mathbf{A}$ é invertível, se $h^2 q(x_j) \leq 24,\ j = 1, \dots, n-1$.

c) Supondo que $h^2 q(x_j) \leq 24, j = 1, \dots, n-1$, obtenha a estimativa do erro

$$|y(x_j) - y_j| \leq \frac{h^4}{600}\frac{2M_6 + 5Q_4 + 5R_4}{Q_*}\,, \qquad j = 0, \dots, n\,,$$

onde $M_6 = \max_{x\in[a,b]} |y^{(6)}(x)|$, $Q_4 = \max_{x\in[a,b]} |(qy)^{(4)}(x)|$, $R_4 = \max_{x\in[a,b]} |r^{(4)}(x)|$.