LMAC/MMA/MEIC
Análise Numérica

11^a **Aula Prática – 2 de Dezembro de 2016**

1. Mostre que o método-θ

$$y_{n+1} - y_n = h\Big[(1-\theta)f_n + \theta\, f_{n+1}\Big]\,, \qquad n = 0, 1\ldots\,, \qquad \theta \in \mathbb{R}\,,$$

é A-estável sse $\theta \geq \frac{1}{2}$.

2. Prove que o método do ponto médio implícito

$$y_{n+1} = y_n + h\, k_1\,, \quad k_1 = f\Big(t_n + \frac{h}{2}\,, y_n + \frac{h}{2}\,k_1\Big)\,, \quad n \geq 0\,,$$

é A-estável.

3. Analise a estabilidade absoluta do método de Adams-Bashforth de ordem 2

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{3h}{2}\,f_{n+1} - \frac{h}{2}\,f_n\,, \qquad n = 0, 1\ldots$$

Determine o(s) *intervalo(s)* de estabilidade absoluta, i.e. os valores $\overline{h} \in \mathbb{R}$ para os quais o polinómio de estabilidade $\pi(z, \overline{h})$ satisfaz a condição da raiz absoluta. Esboce, no plano complexo, a *região* de estabilidade absoluta.

4. A função de estabilidade de um método Runge-Kutta de s etapas é dada por

$$R(\overline{h}) = 1 + \overline{h}\, b^T (I - \overline{h}A)^{-1}\,\mathbf{1}\,,$$

onde $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{s\times s}, b = [b_1\ b_2\ \ldots\ b_s]^T \in \mathbb{R}^s$ e $\mathbf{1} = [1\ 1\ \ldots\ 1]^T \in \mathbb{R}^s$.

a) Mostre que a função de estabilidade $R(\overline{h})$ pode ser expressa como

$$R(\overline{h}) = \frac{\det(I - \overline{h}\,A + \overline{h}\,\mathbf{1}\,b^T)}{\det(I - \overline{h}\,A)}\,.$$

b) Prove que, se o método for explícito, a função de estabilidade pode-se escrever na forma

$$R(\overline{h}) = 1 + \sum_{r=1}^{s} b^T A^{r-1}\,\mathbf{1}\,\overline{h}^{\,r}\,,$$

5. Considere os métodos de Runge-Kutta explícitos de duas etapas de ordem 2

$$y_{n+1} = y_n + h\,(b_1 k_1 + b_2 k_2)\,, \qquad k_1 = f(t_n, y_n)\,, \qquad k_2 = f(t_n + c_2 h, y_n + h\, a_{21} k_1)\,, \tag{1}$$

em que

$$b_1 + b_2 = 1\,, \qquad c_2 b_2 = a_{21} b_2 = \frac{1}{2}\,.$$

Analise a estabilidade absoluta dos métodos (1).

6. Mostre que a função de estabilidade do método DIRK do exercício **6.** da Ficha 10 é

$$R(\overline{h}) = \frac{1 - \frac{\overline{h}}{\sqrt{3}} - \frac{\overline{h}^2}{6} - \frac{\overline{h}^2}{2\sqrt{3}}}{1 - \overline{h} - \frac{\overline{h}}{\sqrt{3}} + \frac{\overline{h}^2}{3} + \frac{\overline{h}^2}{2\sqrt{3}}}\,.$$

Esboce, no plano complexo, a *região* de estabilidade absoluta e verifique que o método é A-estável.

7. Considere a seguinte tabela de Butcher, associada a um método de Runge–Kutta de 2 etapas

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{3} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \tag{2}$$

a) Analise a consistência e convergência do método. Determine a sua ordem.

b) Mostre que a função de estabilidade do método é dada por

$$R(\overline{h}) = \frac{6 + 2\,\overline{h}}{6 - 4\,\overline{h} + \overline{h}^{\,2}}\ , \quad \overline{h} \in \mathbb{C}\,.$$

Determine os intervalos de estabilidade absoluta do método de Runge–Kutta. Esboce, no plano complexo, a *região* de estabilidade absoluta e verifique que o método é A-estável.

c) Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = -\,y^2\,, & t \geq 1 \\ y(1) = 1\,. \end{cases} \tag{3}$$

Obtenha uma aproximação da solução de (3) em $t = 1.5$ pelo método de Runge-Kutta associado à tabela de Butcher (2). Considere $h = 0.5$.

8. Considere a seguinte tabela de Butcher, associada a um método RK (método de *Merson*) explícito de 5 etapas

$$\begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 2 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Prove que a função de estabilidade do método de Merson é dada por

$$R(\,\overline{h}\,) = 1 + \sum_{i=1}^{4} \frac{\overline{h}^{\,i}}{i!} + \frac{\overline{h}^{\,5}}{144}\,.$$

Analise a estabilidade absoluta do método.