LMAC/MMA/MEIC
Análise Numérica

10^a **Aula Prática – 25 de Novembro de 2016**

1. Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \quad 1 \le t < 2\,, \\ y(1) = \alpha\,, \end{cases}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$, e o seguinte método multipasso

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = -2hf(t_n, y_n), \qquad n \ge 0\,, \tag{1}$$

com $t_0 = 0$ e $t_n = t_{n-1} + h,\ n = 1, 2, \ldots$, para a sua resolução numérica.

a) Verifique que o método (1) é consistente e determine a sua ordem.

b) Seja $f(t,y) = -y^2$ e $\alpha = 1$. Obtenha um valor aproximado para $y(1.6)$ pelo método (1). Tome $h = 0.1$ e calcule y_1 pelo método de Taylor de ordem 2.

c) Prove que o método (1) não é convergente.

2. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(t,y)\,, \qquad a \le t \le b\,, \\ y(a) = \alpha\,, \end{cases}$$

e o seguinte método multipasso linear a 3 passos

$$y_{n+3} + y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = \frac{h}{3}\Big(8\,f(t_{n+2}, y_{n+2}) + 2\,f(t_{n+1}, y_{n+1}) + 2\,f(t_n, y_n)\Big)\,, \quad n \ge 0\,. \tag{2}$$

a) Prove que o método (2) é consistente. Determine a sua ordem.

b) Analise a zero-estabilidade e a convergência do método (2).

c) Determine a solução da equação às diferenças

$$y_{n+3} + y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = 0\,,$$

com as condições iniciais $y_0 = 1, y_1 = 1 + \epsilon, y_2 = 1 + 2\epsilon$, em que $|\epsilon| \ll 1$. Conclusão?

3. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x)\,, \quad a \le x \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

onde $f \in C[a,b]$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. Tendo em conta que $y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(s)\ ds$, mostre que o método do ponto médio (o método de Euler modificado) corresponde à aplicação da regra do ponto médio ao integral $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(s)\,ds$. Mostre ainda que o método de Heun corresponde à aplicação da regra dos Trapézios.

4. Considere a seguinte tabela de Butcher

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \tag{3}$$

a) Mostre que o método de Runge-Kutta explícito, associado à tabela (3), é consistente. Determine a sua ordem.

b) Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = -\,y^2\,, \quad 1 \le x \le 2 \\[2ex] y(1) = 1 \end{cases}$$

Obtenha um valor aproximado para $y(1.2)$ pelo método associado à tabela (3). Tome $h = 0.1$.

5. Considere o método de Runge-Kutta de s etapas

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \displaystyle\sum_{i=1}^{s} b_i k_i\,, \\[2ex] k_i = f\Big(t_n + c_i h,\, y_n + h \displaystyle\sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j\Big)\,, \quad i = 1, \ldots, s\,, \end{cases}$$

aplicado ao problema autónomo

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t))\,, \quad t > 0\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

Verifique que o método é de ordem ≤ 3 se as seguintes condições forem satisfeitas

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \left.\displaystyle\sum_{i=1}^{s} b_i = 1 \right\} \text{ ordem } 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{s} b_i c_i = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \text{ ordem } 2 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{s} b_i c_i^2 = \frac{1}{3} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6} \end{array}\right\} \text{ ordem } 3$$

6. Considere o seguinte método DIRK (*Diagonally Implicit Runge-Kutta*)

$$\begin{aligned} & y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\,(k_1 + k_2)\,, \quad n \ge 0\,, \\ & k_1 = f(t_n + c_1\,h, y_n + h\,a_{11} k_1)\,, \quad k_2 = f(t_n + c_2\,h, y_n + h\,a_{21} k_1 + h\,a_{22} k_2)\,, \end{aligned} \tag{4}$$

em que

$$c_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}\,, \quad c_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}\,, \quad a_{11} = a_{22} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \quad a_{21} = -\,\frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

a) Determine a ordem do método (4).

b) Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = -\,y^2\,, \quad 1 \le x \le 2 \\[2ex] y(1) = 1 \end{cases}$$

Obtenha um valor aproximado para $y(1.2)$ pelo método (4). Tome $h = 0.1$.