Matemática Computacional

Exercícios

1° Semestre — 2014/15

Teoria dos erros

Nos exercícios deste capítulo os números são representados em base decimal.

1. Represente x em ponto flutuante com 4 dígitos e arredondamento simétrico, nos seguintes casos

(a)	$x = 1/6$	(b)	$x = 1/3$	(c)	$x = -83784$
(d)	$x = -83785$	(e)	$x = 83798$	(f)	$x = 0.0013296$

2. Tomaram-se para valores aproximados de $N_1 = 0.3000 \times 10^1$, $N_2 = 0.3000 \times 10^{-3}$ e $N_3 = 0.3000 \times 10^4$, respectivamente os valores $\tilde{N}_1 = 0.3100 \times 10^1$, $\tilde{N}_2 = 0.3100 \times 10^{-3}$ e $\tilde{N}_3 = 0.3100 \times 10^4$. Determine os respectivos erros absolutos e relativos, bem como as percentagens de erro. Comente sobre os valores obtidos.

3. Considere os números $x = \pi$ e $y = 2199/700$.

   (a) Pretendem-se aproximações $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ de x e y, respectivamente, com erros absolutos não excedendo 0.0005. Escolha $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ com 4 dígitos na mantissa, usando arredondamento simétrico. Obtenha ainda $\tilde{x} - \tilde{y}$.

   (b) Calcule os erros absolutos e relativos de $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ e de $\tilde{x} - \tilde{y}$, bem como as percentagens de erro. Comente.

   (c) Com o objectivo de ilustrar a influência nos resultados da precisão utilizada, represente em ponto flutuante com 6 algarismos na mantissa os números x e y. Determine $fl\,(\,fl(x) - fl(y)\,)$ e o respectivo erro relativo. Houve melhoria nos resultados em relação a b) ?

4. Determine os erros absoluto e relativo cometidos no cálculo do determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5.7432 & 7.3315 \\ 6.5187 & 8.3215 \end{bmatrix}$$

se utilizar um sistema de ponto flutuante com mantissa de comprimento 4.

5. Ao calcular-se a expressão

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$$

numa máquina usando o sistema de ponto flutuante FP(10,6,-30,30) com arredondamento simétrico, verificou-se que para valores de x muito grandes o erro relativo era também muito grande.

   (a) Verifique que o erro relativo é 100% para $x = 2000$. Qual o valor do erro relativo para valores de x ainda maiores?

   (b) Qual a razão desse erro relativo grande: o problema é mal condicionado ou há instabilidade numérica? Justifique e apresente uma forma de calcular $f(x)$ que não apresente erros relativos tão grandes.

Equações não lineares

1. Considere a equação $\sin x - e^{-x} = 0$.

   (a) Prove que esta equação tem uma e uma só raiz $z \in [0.5, 0.7]$.

   (b) Efectue três iterações pelo método da bissecção e indique um majorante do erro dessa aproximação.

   (c) Determine o número m de iterações necessárias para garantir $|z - x_m| < 10^{-6}$.

2. Considere a função de variável real

$$g(x) = \frac{1 + e^x + x^3}{14}$$

e a sucessão numérica $\{x_m\}$ definida por $x_{m+1} = g(x_m), m = 0, 1, ...$

   (a) Mostre que esta sucessão tem limite $z \in [0, 1]$, independente de $x_0 \in [0, 1]$.

   (b) Partindo de $x_0 = 0$, calcule x_5 e determine um majorante de $|z - x_5|$.

   (c) Verifique que a função g tem um (único) ponto fixo no intervalo $[2, 3]$. Poderá usar, para a sua determinação, o método iterativo baseado na função iteradora g?

3. Considere a iteração do ponto fixo

$$x_{m+1} = g(x_m), \quad m = 0, 1, ...$$

com função iteradora $g(x) = 1 + \arctan(x)$.

(a) Indique um intervalo em que as condições do teorema do ponto fixo sejam válidas para a função g.

(b) Aproxime o ponto fixo de g com erro inferior a 10^{-6}. Qual a ordem de convergência do método?

4. Considere a equação

$$e^x - 4x^2 = 0 \tag{1}$$

que tem apenas três raízes reais: $z_1 < z_2 < z_3$, tal que $z_1 \in [-1, 0]$, $z_2 \in [0, 1]$ e $z_3 \in [4, 5]$.

(a) Para aproximar as raízes positivas da equação (1), considere-se o método do ponto fixo com função iteradora

$$g(x) = \frac{1}{2}\, e^{x/2}$$

i. Mostre que z_2 e z_3 são pontos fixos de g.

ii. Mostre que o método iterativo associado a g converge para z_2, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [0, 1]$.

(b) Mostre que não é possível usar esse método para obter uma aproximação da raiz $z_3 \in [4, 5]$.

(c) Determine uma função iteradora tal que o método do ponto fixo associado convirja para a raiz negativa da equação.

5. Considere uma sucessão de números reais, definida do seguinte modo:

$$x_0 = 1, \qquad x_{k+1} = 1 - \frac{1}{b\, x_k}, \qquad (k = 0, 1, \dots)$$

onde b é um número real dado.

a) Com base no teorema do ponto fixo, mostre que, se $b > 4$ esta sucessão converge e que todos os seus termos estão compreendidos no intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$.

b) Seja $b = \dfrac{25}{4}$. Através da definição de ponto fixo, calcule $z = \lim_{k\to\infty} x_k$.

c) Para o mesmo valor de b, mostre que todos os termos da sucessão pertencem ao intervalo $[\frac{4}{5}, 1]$ e que se verifica

$$|z - x_{k+1}| \le \frac{4}{75}\left(\frac{1}{4}\right)^k \qquad (k = 0, 1, \dots)$$

6. Considere a equação

$$3x^2 - e^x = 0$$

a) Localize graficamente as raízes da equação e indique intervalos de comprimento unitário que as contenham.

b) Considere as seguintes sucessões

$$(S_1) \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{e^{x_n}}{3}} \qquad\qquad (S_2) \quad x_{n+1} = \ln(3x_n^2).$$

Mostre que é possível obter aproximações das raízes positivas da equação usando, para cada raiz, uma destas sucessões. Indique, em cada caso, um intervalo onde poderá escolher a iterada inicial x_0.

c) Efectue duas iterações usando a sucessão S_1 com $x_0 = 1$. Dê um majorante para o erro da aproximação obtida.

d) Será possível usar a sucessão S_1 para aproximar a maior raiz positiva da equação? E poderá usar a sucessão S_2 para aproximar a menor raiz positiva da equação?

7. Considere a equação

$$x^3 - x = \frac{1}{4}\cos(x).$$

a) Com base nos teoremas sobre localização de raízes mostre que esta equação tem no máximo 3 raízes reais.

b) Mostre que a equação considerada tem duas raízes reais z_1 e z_2 situadas, respectivamente, nos intervalos $[-0.5, -0.2]$ e $[1.0, 1.5]$, e que existe apenas uma raiz em cada um destes intervalos.

c) Considere as funcões iteradoras

$$g_1(x) = x^3 - \frac{1}{4}\cos(x) \qquad g_2(x) = (x + \frac{1}{4}\cos(x))^{1/3}.$$

Se partirmos da aproximação inicial $x_0 = 0.5$ e aplicarmos cada uma das funcões iteradoras obtemos sucessões que convergem para cada uma das raízes consideradas na alínea anterior. Diga qual das funções corresponde a cada uma das raízes e justifique, com base no teorema do ponto fixo.

d) Indique uma nova função iteradora que permita obter aproximações de cada uma das raízes consideradas, de tal modo que a convergência das respectivas sucessões seja quadrática. `EXAME, LEIC 29/01/2004`

8. Considere a iteração do ponto fixo $x_{m+1} = g(x_m)$, $m = 0, 1, \ldots$, com as funções iteradoras

$$g_1(x) = 1 + \arctan(x), \quad g_2(x) = \frac{x(x^2+6)}{3x^2+2}$$

a) Para cada um dos pontos fixos de g_1 e de g_2 procure um intervalo em que as condições do teorema do ponto fixo sejam válidas.

b) Aproxime os pontos fixos de g_1 e de g_2 com um erro absoluto inferior a 10^{-6}. Determine a ordem de convergência para cada um dos métodos.

9. Considere a função real

$$f(x) = 2x - \cos(x).$$

a) Mostre que a equação $f(x) = 0$ possui uma só raiz α no intervalo $(0, \pi/4)$ e calcule-a com erro inferior a 0.25. Justifique.

b) Mostre que o processo iterativo

$$x_{n+1} = \frac{\cos(x_n)}{2} \qquad n = 0, 1, \ldots$$

converge para o número α, independentemente da escolha que fizer de $x_0 \in (0, \pi/4)$. Dê uma estimativa do coeficiente assimptótico de convergência. A convergência é monótona? Justifique.

c) Faça $x_0 = \pi/8$. Calcule um majorante para o erro absoluto de x_{16}.

`EXAME LEIC 15/12/2001`

10. Pretende-se determinar, utilizando o método de Newton, a maior das duas raízes positivas da equação

$$-x^3 + 14x - 1 - e^x = 0.$$

   (a) Mostre que se x_0 for escolhido no intervalo [2.6,3], estão asseguradas as condições de convergência do método.

   (b) Efectue três iterações do método de Newton e determine um majorante do erro de x_3.

   (c) Sem efectuar iterações, calcule um majorante para o erro da quinta iterada.

11. Utilize o método de Newton para aproximar a (única) raiz da equação

$$x^3 - \cos x = 1,$$

no intervalo $[1, 2]$. Escolha o valor $x_0 = 1$ para iterada inicial e calcule as iteradas x_1 e x_2. Quantas iteradas teria ainda que calcular para obter uma aproximação da raiz com erro inferior a 10^{-9}?

12. Considere o seguinte método para obter um valor aproximado de $\sqrt{10}$:

   a) O método de Newton aplicado à função $f_1(x) = x^2 - 10$. Mostre que se escolher $x_0 = 4$ então o método converge e a convergência é da ordem 2. Calcule 3 iteradas e indique um majorante para o erro de x_3. O que acontece se escolher $x_0 > 4$?

   b) O método de Newton aplicado a função $f_2(x) = x^{-1/2}(x^2 - 10)$. Admitindo que o método converge mostre que a ordem de convergência é 3.

13. Mostre que a equação $\ln(x) - (x-2)^2 = 0$ tem 2 e só 2 raízes reais distintas e indique, para cada uma delas, um intervalo (de comprimento não superior a 2) que a contenha (sem conter a outra). Se pretendesse utilizar o método de Newton para calcular a raiz mais pequena, diga, justificando, qual (ou quais) dos seguintes valores poderia utilizar como aproximação inicial: $x_0 = 2.1$, $x_0 = 2.5$ ou $x_0 = 1.4$? Mostre que para o valor x_0 que escolheu estão garantidas as condições de convergência do método e efectue uma iteração.

14. Considere a equação
$$x\tan(x) - 1 = 0.$$
   Aplicando o método da secante, obtenha as três primeiras iteradas para o cálculo da raiz situada no intervalo $[0.8, 0.9]$. Determine um majorante do erro do resultado obtido.

15. Considere a equação
$$e^x = 2 - x^2.$$
   (a) Prove que a equação tem uma única raiz no intervalo $]0.5, 1.0[$. Por bissecção determine um sub-intervalo I que contenha a raiz.

   (b) Escolha duas iteradas iniciais x_{-1} e x_0 de modo a que se possa aplicar o método da secante para aproximar a raiz em I e calcule a iterada seguinte x_1.

   (c) Indique um majorante do erro absoluto da iterada x_2 que tenha em conta os valores encontrados na alínea anterior.

16. Seja g uma função contínua tal que $g(a) = b$ e $g(b) = a$.

   a) Mostre que existe pelo menos um ponto fixo de g em $[a, b]$.

   b) Mostre que se $g \in C^1([a, b])$, então a derivada de g toma o valor -1 em algum ponto desse intervalo. Poderá aplicar o teorema do ponto fixo à função g no intervalo $[a, b]$?

Resolução Numérica de Sistemas Lineares

1. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}$$
e considere o sistema $Ax = b$, com $b = [1 \quad 10^{-6}]^T$, que tem por solução exacta $x = [1 \quad 1]^T$.

   a) Determine cond(A) na $|| \, ||_\infty$.

   b) Considere o sistema $A\tilde{x} = \tilde{b}$, onde $\tilde{b} = [1+\epsilon \quad 10^{-6}]^\top$. Obtenha $\|\delta_b\|_\infty$ e $\|\delta_x\|_\infty$ e comente.

   c) Considere ainda $\tilde{b} = [1 \quad 2 \times 10^{-6}]^\top$. Obtenha $\|\delta_b\|_\infty$ e $\|\delta_x\|_\infty$ e comente.

2. Seja A a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ com inversa } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
onde $a \in \mathbb{R}$.

   a) Calcule os números de condição associados à norma $\|.\|_\infty$ e à norma $\|.\|_1$.

   b) Mostre que $\text{cond}_1(A) = \text{cond}_\infty(A)$.

   c) Seja $|a| > 1$. Suponhamos que, ao resolver o sistema $Ax = b$, o segundo membro é afectado de um erro tal que $\|\delta b\|_\infty \leq \epsilon$. Determine um majorante de $\|\delta x\|_\infty$.

   d) Para que valores de a o sistema é mal condicionado?

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 0.00005 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine o número de condição da matriz A na norma $||.||_1$;

   (b) Ao resolver um sistema com a matriz A, sabendo-se que o segundo membro é afectado por um erro cuja norma, em termos relativos, satisfaz $\|\delta b\|_1 \leq \epsilon$, determine um majorante da norma correspondente do erro relativo da solução.

4. Considere um sistema de duas equações na forma geral

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 = b_2 \end{cases}$$

onde $a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} \neq 0$.

a) Mostre que os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel convergem para qualquer aproximação inicial $x^{(0)}$ se e só se $|m| < 1$, onde $m = \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$.

b) No caso do método de Jacobi, mostre que se a matriz do sistema tiver a diagonal estritamente dominante por linhas, se verifica

$$\|x^{(k+1)} - x\|_\infty \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty$$

onde x é a solução exacta do sistema, $x^{(k)}$ é a k-ésima iterada e $\alpha = \max(\frac{|a_{12}|}{|a_{11}|}, \frac{|a_{21}|}{|a_{22}|})$.

c) Considere o sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Efectue a primeira iteração do método de Jacobi, partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = (2, 1)$. Com base na alínea anterior determine um majorante para o erro do resultado obtido.

d) Nas condições da alínea anterior, quantas iterações do método de Jacobi são necessárias para garantir que seja satisfeita a condição $\|x^{(k)} - x\|_\infty < 0.001$?

5. Considere o sistema $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 8 \\ 2 & -7 & -10 \\ 10 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ -23 \\ 34 \end{bmatrix}$$

a) Será possível reordenar as linhas do sistema de modo que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel sejam convergentes? Justifique.

b) Escreva o sistema na forma iterativa e calcule $x^{(2)}$, considerando o método de Gauss-Seidel com $x^{(0)} = (1, 1, 1)$.

c) Determine um majorante para $\|x - x^{(2)}\|_\infty$.

6. Considre o sistema linear

$$\begin{cases} x+z & = & 2 \\ -x+y & = & 0 \\ x+2y-3z & = & 0 \end{cases}$$

a) Prove que o método de Jacobi converge para a solução exacta deste problema, qualquer que seja a aproximação inicial.

b) Mostre que, no caso de se usar o método de Gauss-Seidel, não está garantida a convergência para qualquer aproximação inicial. Indique uma aproximação inicial $x^{(0)}$ (diferente da solução exacta), tal que a sucessão $\{x^{(k)}\}$ seja convergente; e uma aproximação inicial $x^{(0)}$, partindo da qual o método divirja.

7. Considere a matriz da forma

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & \alpha \\ \beta & -\beta & -\alpha \\ \beta & -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

onde $0 < \beta < \alpha$.

a) Mostre que, qualquer que seja a iterada inicial, o método de Jacobi converge e o método de Gauss-Seidel não converge para a solução de um sistema $Ax = b$.

b) Considere $\beta = 1,\ \alpha = 2$ e $b = (0,0,0)$. A solução única do sistema $Ax = b$ será $x = (0,0,0)$.

(i) Mostre que, qualquer que seja $x^{(0)}$, ao fim de três iterações obtemos a solução exacta pelo método de Jacobi. (Verifique que a matriz C associada ao método de Jacobi satisfaz $C_J^3 = 0$.)

(ii) Mostre que se começar com $x^{(0)} = (0,2,1)$, aplicando o método de Gauss-Seidel, obtém $x^{(1)} = (0,-2,-1),\ x^{(2)} = (0,2,1),\ x^{(3)} = (0,-2,-1),\ldots$. Verifique que $(0,2,1)$ é um vector próprio associado ao valor próprio -1 da matriz C (do método de Gauss-Seidel) e não é solução do sistema.

8. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 & + & 10x_2 & + & x_3 & = & 12 \\ x_1 & + & x_2 & + & 10x_3 & = & 12 \\ 10x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 12 \end{cases}$$

(a) Reordene as linhas de modo a que matriz do novo sistema tenha a diagonal estritamente dominante.

(b) Aplique o método de Jacobi ao novo sistema e efectue 4 iterações. Calcule um majorante para o erro na 4ª iterada. Considere $\mathbf{x}^{(0)} = [-4, -4, -4]^T$.

(c) Nas condições da alínea anterior, quantas iterações do método de Jacobi são necessárias para garantir que seja satisfeita a condição $||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}||_\infty < 0.001$?

(d) Aplique o método de Gauss-Seidel até que $||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}||_\infty < 10^{-2}$. Conclua sobre o erro da iterada $\mathbf{x}^{(k)}$.

Métodos Numéricos para Sistemas Não-lineares

1. Considere o seguinte sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} x^3 + 5y - 2z &= 0 \\ e^y - z^2 &= 1 \\ -x^2 + y + z &= 0 \end{cases}$$

Para aproximar uma solução deste sistema pretende-se utilizar o método de Newton. Tomando como aproximação inicial o vector $x^{(0)} = (c, 0, 0)$, onde c é um certo número real, para obter a aproximação $x^{(1)}$ somos levados a resolver um sistema linear com matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3c^2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2c & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Mostre como se obteve esta matriz e calcule o segundo membro do sistema.

b) No caso de $c = 1$ resolva o sistema pelo método de eliminação de Gauss e obtenha a primeira iterada $x^{(1)}$ do método de Newton.

c) No caso de se aplicar o método de Jacobi para resolver o sistema linear, diga para que valores de c está garantida a condição necessária e suficiente de convergência do método.

R: (b) $x^{(1)} = (0, 0, -1)$. (c) $|c| > 4/3$.

2. Considere o sistema não-linear

$$\begin{cases} 2x - \cos(x+y) = 2 \\ 3y - \sin(x+y) = 6 \end{cases}$$

Inicializando com $x^{(0)} = (1, 1)$ calcule duas iterações pelo método de Newton.

3. Pretende-se resolver pelo método de Newton o sistema de equações não-lineares

$$\left\{\begin{array}{rcl} e^x - 3 & = & 0 \\ 3\,y + 4\,z & = & 3 \\ 2\,x^2 + 2\,x + 2\,z & = & 1 \end{array}\right.$$

a) Tomando como aproximação inicial $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 2)$, ao efectuar uma iteração pelo método de Newton, somos conduzidos a resolver um certo sistema de equações lineares. Qual?

b) Resolva o sistema de equações lineares obtido na alínea anterior pelo método de Gauss-Seidel, considerando como aproximação inicial o vector nulo e efectuando duas iterações.

4. Pretende-se resolver o seguinte sistema de equações não-lineares pelo método de Newton

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1^2 - x_2^2 + x_3^3 & = & -3 \\ 4\,x_1 + x_2^3 + x_3 & = & 2 \\ x_1\,x_3 + 5\,x_2 & = & 3 \end{array}\right.$$

usando como aproximação inicial o vector $x^{(0)} = (1, 0, -1)$.

a) Mostre que, para se obter $x^{(1)}$, se deve resolver um sistema linear da forma $Av = h$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

e v e h são vectores de $\mathbb{R}^3$. Calcule h.

b) Transforme o sistema linear considerado num sistema equivalente, de modo a que fique garantida a convergência do método de Gauss-Seidel. Depois, tomando como aproximação inicial $v^{(0)} = (-1, -1, -1)$, aplique este método até obter a solução exacta do sistema linear.

c) Obtenha o valor de $x^{(1)}$, a primeira iterada do método de Newton.

`EXAME, LEIC 12/02/2004`

5. Considere o método de Newton aplicado à resolução do sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} (x_1^4 - x_3^2)\,x_2 + 1 & = & 0 \\ (x_1^2 + x_3 + 8\,b)x_2 & = & 3 \\ (3 - 3\,x_3^2)\,x_2 + 1/8 & = & 0 \end{array}\right.$$

a) Verifique que, se $x^{(0)} = (1, b, -1)$, então $x^{(1)} = x^{(0)} - h$, sendo h a solução do sistema linear $Ah = b$, em que:

$$A = \begin{bmatrix} 4\,b & 0 & 2\,b \\ 2\,b & 8\,b & b \\ 0 & 0 & 6\,b \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 8\,b^2 - 3 \\ 1/8 \end{bmatrix}$$

b) Justifique que o método de Jacobi, aplicado a $Ah = b$, converge qualquer que seja $h^{(0)}$, se e só se $b \neq 0$. Pode garantir que $h^{(3)}$ seja a solução exacta do sistema $Ah = b$?
`TESTE, LEAmb 05/04/2003`

Interpolação Polinomial

1. Na tabela seguinte são apresentados valores duma função $f \in C^2(]0, +\infty[)$

x	0.8	1.0	1.6
$f(x)$	1.890	2.000	3.185

   (a) Obtenha a expressão do polinómio interpolador de f nos três pontos tabelados, através da fórmula de Lagrange.

   (b) Idem, mas através da fórmula de Newton.

   (c) Calcule uma aproximação para $f(1.3)$. Obtenha um majorante do erro a partir da expressão do erro de interpolação, admitindo que $f(x) - 1/x$ é um polinómio de grau não superior a 2.

R: (a) $p_2(x) = 1.890\,\dfrac{(x-1.0)(x-1.6)}{0.16} - 2\,\dfrac{(x-0.8)(x-1.6)}{0.12} + 3.185\,\dfrac{(x-0.8)(x-1)}{0.48}$.
(b) $p_2(x) = 1.890 + 0.55\,(x - 0.8) + 1.78125\,(x - 0.8)\,(x - 1.0)$.
(c) $|f(1.3) - p_2(1.3)| \leq \dfrac{1}{3!}\dfrac{6}{0.8^4}\,|(1.3 - 0.8)(1.3 - 1.0)(1.3 - 1.6)|$.

2. Designando por N ($N \geq 1$) o número de subintervalos, de igual comprimento $h = 1/N$, do intervalo $I = [0, 1]$, pretende-se construir uma tabela de valores da função e^x nesse intervalo, usando os pontos igualmente afastados

$$x_j = j\,h, \qquad j = 0, 1, \ldots, N\,.$$

Em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, para $0 \leq i \leq (N-1)$, a função é aproximada pelo polinómio interpolador de grau ≤ 1, nos pontos x_i e x_{i+1}. Determine o valor máximo do espaçamento h (ou o menor valor de N), de modo que o erro de interpolação em qualquer ponto do intervalo I seja inferior a 10^{-6}.

R: $\quad h < \sqrt{8 \times 10^{-6}/e} \simeq 1.716 \times 10^{-3}$, $N = 583$.

3. Considere a função real cujos valores são dados na seguinte tabela:

x	-2	-1	-0.5	0
$f(x)$	6	2	α	4

(a) Supondo que f é um polinómio de grau 2, obtenha esse polinómio e calcule o valor de α, usando a fórmula de Lagrange.

(b) Utilizando o polinómio obtido na alínea anterior e supondo que f tem a forma $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, calcule de novo o valor de α. `EXAME, LEIC 29/01/2004`

4. Considere a seguinte tabela de valores da função $f(x) = \log_{10}(x)$:

x_i	2.0	2.5	3.0
$\log_{10} x_i$	0.30103	0.39794	0.47712

(a) Usando a fórmula de Newton e todos os pontos da tabela, calcule uma aproximação de $f(2.4)$.

(b) Determine um majorante do erro absoluto cometido ao aproximar $f(x)$, pelo método utilizado na alínea anterior, quando $x \in [2, 3]$. Compare com o erro do resultado obtido para $x = 2.4$.

$R:\quad (a)\quad f(2.4) \simeq p_2(2.4) = 0.379976$, $e_2(2.4) = f(2.4) - p_2(2.4) = 0.000235$, $E = \max_{2.0 \leq x \leq 3.0} |f(x) - p_2(x)| \leq 0.000871$.

5. Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f(x)$, tal que $f \in C([0, 0.55])$:

x	0.2	0.34	0.4	0.52	0.65	0.72
$f(x)$	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

(a) Obtenha uma aproximação de $f(0.47)$ usando um polinómio interpolador de grau 2. Justifique a escolha dos nós de interpolação.

(b) Admitindo que $f \in C^3([0,1])$ e que $\max_{x\in[0,1]} |f^{(3)}(x)| = M$, calcule um majorante para o erro do resultado obtido na alínea anterior.

R:

a)Usando os nós de interpolação $x_0 = 0.34, x_1 = 0.4, x_2 = 0.52$:

$$f(0.47) \approx P_2(0.47) = 0.27802$$

b)

$$|f(x) - P_2(x)| \leq M \times 0.758 \times 10^{-4}.$$

6. Seja f uma função que nos nós $\{-1, 1, 3\}$ tem como polinómio interpolador $p_2(x) = 3 - 2x + 6x^2$.

(a) Sabendo que $f[-1, 1, 2] = 4$, calcule o polinómio p_3 que interpola f nos nós anteriores e também em $x_3 = 2$.

(b) Sabendo ainda que $f^{(iv)}(x) = 78$, para todo $x \in \mathbb{R}$, determine a expressão analítica de f.

7. Considere $a \neq 0$ e uma função g para a qual

$$g(0) = a, \quad g(g(0)) = 2a, \quad g(g(g(0))) = b.$$

(a) Determine o polinómio interpolador de g no conjunto de nós $\{0, a, 2a\}$.

(b) Considere b de forma a que g tenha um ponto fixo em $2a$. Mostre que numa vizinhança desse ponto fixo o polinómio interpolador p_2 é contractivo. Determine o outro ponto fixo de p_2 e verifique que num intervalo que inclua esse ponto o polinómio não é contractivo.

8. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f:

x	-1	1	4
$f(x)$	2	-2	-8

Sabendo que f é um polinómio e que:

$$f[-1,1,2]=4, \qquad f[-1,1,2,4,x]=3 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1,2,4\}$$

determine a forma de f.

R:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 2-2(x+1)+4\,(x+1)\,(x-1) \\ P_3(x) &= P_2(x)-2\,(x+1)\,(x-1)\,(x-4) \\ f(x)=P_4(x) &= P_3(x)+3\,(x+1)\,(x-1)\,(x-4)\,(x-2) \end{aligned}$$

9. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	-1	0	1	2
f_i	1	1	1	2

(a) Usando a fórmula de Newton com diferenças divididas, construa o polinómio interpolador de f de grau menor ou igual a 3.

(b) Sabendo que $f'''(x)=4x-1$, utilize a alínea anterior para determinar a expressão exacta de f.

Método dos Mínimos Quadrados

1. Considere a seguinte tabela:

x	1.0	1.2	1.5	1.6
$f(x)$	5.44	6.64	8.96	9.91

(a) Obtenha o polinómio do primeiro grau que se ajusta (no sentido dos mínimos quadrados) aos pontos da tabela.

(b) Idem, mas para o polinómio do segundo grau. Utilizando o polinómio obtido, determine uma estimativa do valor de $f(1.4)$.

(c) Relativamente aos dois casos anteriores, calcule o valor das somas dos quadrados dos desvios correspondentes aos ajustamentos efectuados. Qual seria o valor dessa soma, no caso de se fazer o ajustamento por um polinómio do 3° grau.

R:

$$a) \quad P_1(x) = -2.135933 + 7.451647x$$

$$b) \quad P_2(x) = 3.966473 - 2.244618x + 3.721460x^2; \qquad f(1.4) \approx P_2(1.4) = 8.118.$$

$$d) \quad \sum_{i=0}^{3}(f(x_i) - P_1(x_i))^2 = 0.06485; \qquad \sum_{i=0}^{3}(f(x_i) - P_2(x_i))^2 = 0.306 \times 10^{-2};$$
$$\sum_{i=0}^{3}(f(x_i) - P_3(x_i))^2 = 0.$$

2. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f :

x	-1	0	1	2
$f(x)$	6	3	2	1

Pretende-se um ajustamento dos pontos da tabela por uma função do tipo:

$$g(x) = \frac{1}{Ax + B}$$

Determine as constantes A e B pelo método dos mínimos quadrados.

R: Mudança de variável : $h(x) = 1/g(x) = A\,x + B$; $A = 4/15; B = 11/30$.

3. Determine a função da forma $g(x) = Ae^x + Be^{-x}$ que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, à seguinte tabela de valores

x	0	0.5	1.0
$f(x)$	5.0	5.2	6.5

Para simplificar os cálculos, escreva os elementos da matriz usando arredondamento simétrico e uma casa decimal.

R: $A = 2.0; B = 3.0$.

4. Seja f tal que $f(-2) = 3, f(0) = 6$ e $f(2) = 15$. Obtenha a função do tipo $g(x) = ax+b$ que melhor se ajusta aos valores dados, no sentido dos mínimos quadrados. Mostre ainda que

$$\sum_{i=1}^{3}(f(x_i) - \alpha x_i - \beta)^2 \geq 6$$

quaisquer que sejam α, β constantes reais.

R: $a = 3, b = 8, \quad \sum_{i=1}^{3}(f(x_i) - ax_i - b)^2 = 6$.

5. Considere os 6 pontos $(-1, 7), (0, 6), (1, 6), (2, 4), (4, 3), (5, 1)$.

   (a) Determine a função $g(x) = a - x + bx^2$ cujo gráfico melhor se ajusta aos pontos segundo o método dos mínimos quadrados.

   (b) O mesmo que em a) usando $g(x) = a\, e^{bx} - \dfrac{x^2}{4}$, e uma transformação de variáveis.

6. Dada a tabela

x	0	1.5	3.0	4.5	6.0
$f(x)$	1.00	1.57	2.00	4.30	7.00

   diga em que consiste a sua melhor aproximação de mínimos quadrados por funções aproximantes do tipo $g(x) = ax + b\cos(x),\ a, b \in \mathbb{R}$. Calcule esta melhor aproximação, bem como o desvio em 4.5. `EXAME, LEIC 15/12/2001`

7. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f :

x_j	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
f_j	1	0.5	-1	0

   (a) Obtenha a função do tipo $g(x) = a_0 + a_1 \sin(x) + a_2 \cos(x)$ que melhor aproxima f no sentido dos mínimos quadrados e determine $Q = \sum_{j=0}^{3}(f(x_j) - g(x_j))^2$.

   (b) Seja $Q_1 = \sum_{j=0}^{3}(f(x_j) - a\cos(x_j))^2$. Com base na alínea anterior justifique que $Q_1 > 0.0625$, $\forall a \in \mathbb{R}$. `EXAME, LEIC 13/02/2003`

8. Considere a aproximação de mínimos quadrados para os pontos

$$(-1,1),\ (0,1),\ (1,2),(2,2)$$

por uma função $g(x) = a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + a_3\phi_3$ com

$$\phi_1(x) = 1, \quad \phi_2(x) = x, \quad \phi_3(x) = \sin(x) + x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x + 1.$$

Diga se a matriz do sistema normal é invertível e comente a escolha das funções ϕ_k.

Integração Numérica

1. Considere o integral

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

a) Determine o seu valor aproximado, considerando 4 subintervalos e utilizando:

i. A regra dos Trapézios. **ii.** A regra de Simpson.

b) Faça uma estimativa do número mínimo de subintervalos que se deveria considerar, se se pretendesse calcular o integral da alínea anterior, com um erro inferior a 10^{-4}, mediante cada uma das regras referidas.

Solução: a) i) 1.49068; ii) 1.46371; b) i) 117; ii) 12.

2. No intervalo $[0, a]$, uma função f é assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & 0 \leq x \leq 1 \\ 3x - 1 & 1 \leq x \leq a \end{cases}$$

a) Obtenha aproximações para o integral $I(f) = \int_0^a f(x)dx$, com $a = 2$ e $a = 3$, dos seguintes modos:

i. Utilizando a regra dos trapézios composta, com passo $h = 1$.

ii. Utilizando a regra de Simpson simples.

b) Determine o erro de cada um dos resultados obtidos, comparando com o valor exacto de $I(f)$.

c) A fórmula do erro da regra dos trapézios é aplicável neste caso? E a da regra do Simpson? Justifique.

Solução: Fórmula dos trapézios composta: para $a = 2, T_2 = 6$; se $a = 3, T_3 = 25/2$ (em ambos os casos obtém-se o valor exacto do integral). Fórmula de Simpson: $a = 2, S = 16/3$; $a = 3, S = 25/2$ (só no segundo caso se obtém o valor exacto do integral.

Explicação: A função considerada não é continuamente diferenciável em [0,3] (a primeira derivada é descontínua em $x = 1$). A fórmula do erro, em geral, não é aplicável, nem para a regra dos trapézios nem para a de Simpson. No entanto, quando se aplica a regra dos trapézios composta, estamos a integrar a função separadamente em $[0, 1]$, $[1, 2]$ e em $[1, 3]$. Como a função é infinitamente diferenciável em cada um destes intervalos, a fórmula do erro de integração pode ser aí aplicada. De acordo com essa fórmula, o erro é nulo (a segunda derivada de um polinómio de grau 1 é 0). Assim se explica que a regra dos trapézios composta com $h = 1$ seja exacta para esta função. O mesmo raciocínio não é válido para a regra de Simpson, já que, neste caso, a função é integrada no intervalo $[0, 3]$. Ainda assim, no caso de $a = 3$, a regra de Simpson leva-nos ao valor exacto do integral (o que acontece por coincidência).

3. Pretende–se construir uma fórmula de quadratura do tipo

$$Q(g) = A_0 g(0) + A_1 g(1) \quad \text{para aproximar} \quad I = \int_0^1 e^x g(x)dx$$

a) Calcule A_0 e A_1 de modo a que a fórmula seja exacta para funções $g(x) = a + bx$ com $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Seja $g(x) = \sin(x)$. Obtenha uma aproximação de I usando a regra de quadratura obtida em a) e calcule uma estimativa do erro absoluto.

c) Determine um valor aproximado para I usando a regra dos Trapézios composta com **4 subintervalos.**

d) Determine o número mínimo de subintervalos necessários na regra dos Trapézios composta, para garantir que o erro absoluto do resultado seja inferior a 10^{-2} (despreze erros de arredondamento).

4. Pretende-se obter a fórmula de integração

$$Q(f) = A_0 f(0) + A_1[f(x_1) + f(-x_1)]$$

de modo a que ela seja pelo menos de grau 2 para o integral $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$.

a) Exprima A_0 e A_1 em função de x_1.

b) Mostre que a fórmula obtida é pelo menos de grau 3 e determine x_1 de modo a que a fórmula seja pelo menos de grau 5.

Solução:

(a) Os pesos A_0 e A_1 são solução do sistema

$$\begin{cases} A_0 + 2\,A_1 & = 2 \\ \quad 2\,x_1^2\,A_1 & = 2/3 \end{cases}$$

Logo, $A_1 = 1/(3\,x_1^2)$ e $A_0 = (6\,x_1^2 - 2)/(3\,x_1^2)$ e $Q(f) = \frac{6\,x_1^2-2}{3\,x_1^2}\,f(0) + \frac{1}{3\,x_1^2}\,[f(x_1)+f(-x_1)]$.

(b) Como $Q(x^3) = I(x^3) = 0$ e $Q(x^4) = 2/3\,x_1^2$, a regra é pelo menos de grau 3. Atendendo a que $Q(x^4) = I(x^4) = 2/5$ se e só se $x_1 = \pm\sqrt{3/5}$, fazendo $x_1 = \sqrt{3/5}$, e dado que $Q(x^5) = I(x^5) = 0$, a regra respectiva é pelo menos de grau 5 de exactidão.

5. A tabela seguinte mostra os resultados obtidos por uma regra de Newton-Cotes (composta) no cálculo do integral $I(f)$ de uma certa função f indefinidamente diferenciável.

n	8	16	32	64
I_n	295.27	274.15	268.97	267.68

O valor I_n representa a **aproximação** obtida com $n+1$ nós de integração. Sabendo que o **valor exacto** do integral é $I(f) = 267.25$, diga, justificando, que fórmula pode· ter sido utilizada (Trapézios ou Simpson).

6. Pretende-se obter uma fórmula com dois nós no intervalo $[-1, 1]$, i.e. uma fórmula do tipo:

$$I_1(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

a) Escreva o sistema de equações que lhe permite calcular A_0 e A_1 de modo a que a fórmula seja, pelo menos, de grau 1.

b) Resolva o sistema em ordem a A_0 e A_1.

c) Mostre que, se x_0 e x_1 forem tais que $x_0 x_1 = -\frac{1}{3}$, a fórmula de integração assim obtida tem pelo menos grau 2.

Solução: b) $A_1 = \dfrac{2x_0}{x_0 - x_1}$; $A_0 = \dfrac{-2x_1}{x_0 - x_1}$.

7. Sabe-se que a função $f \in C^4(-2,10)$ toma os valores $f(1) = -2, f(4) = 7, f(10) = 6$, e que $1, 4$ e 10 são pontos fixos de $f \circ f$.

   a) Determine o valor aproximado de $\int_{-2}^{10} f(x)dx$ usando a regra de Simpson com 5 nós de quadratura.

   b) Admitindo que $|f^{(iv)}(x)| \leq 10$, determine um majorante do erro absoluto cometido em a).

8. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x	-1	1	2	3	5	7
$f(x)$	-1	1	-1	1	2	$5/2$

   a) Obtenha dois valores aproximados para $\int_{-1}^{7} f(x)dx$, de duas maneiras distintas, recorrendo a fórmulas de quadratura e usando o maior número possível de pontos da tabela. Justifique a escolha dos pontos.

   b) Supondo que $\max_{x\in[-1,7]}|f^{(n)}(x)| \leq M_n, \forall n$, com M_n constante real, determine expressões, em função de M_n, para os erros de integração nos dois casos que considerou na alínea anterior.

9. Seja $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$ e seja $\mathcal{P}_m$ o espaço dos polinómios de grau menor ou igual a m. Pretende-se aproximar I por uma fórmula do tipo

$$Q(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2),$$

   com $x_0, x_1, x_2 \in [-1, 1]$.

   (a) Determine os coeficientes A_0, A_1 e A_2 de modo que Q seja exacta sobre $\mathcal{P}_2$ nos seguintes casos

   (i) $x_0 = -1, x_1 = 1/2, x_2 = 1$;
   (ii) $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$;
   (iii) $x_0 = -\sqrt{3}/3, x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3}/3$;
   (iv) $x_0 = -\sqrt{3/5}, x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3/5}$.

   (b) Relativamente às fórmulas obtidas na alínea anterior, determine o grau de Q.

   Solução: i)$A_0 = 5/9, A_1 = 16/9, A_2 = -1/3$; grau 2; ii) $A_0 = 1/3, A_1 = 4/3; A_2 = 1/3$; grau 3 ; iii)$A_0 = A_2 = 1; A_1 = 0$; grau 3; iv) $A_0 = A_2 = 5/9, A_1 = 8/9$; grau 5.

Métodos Numéricos para EDOs

Euler	$y_{n+1} = y_n + hf_n$
Euler Implícito	$y_{n+1} = y_n + hf_{n+1}$
Ponto Médio	$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + h/2, y_n + h/2f_n)$
Heun	$y_{n+1} = y_n + h/2(f_n + f(x_n + h, y_n + hf_n))$

1. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - x + 4y(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

com solução exacta $y(x) = x/4 - 3/16 + (19/16)\,e^{4x}$.

a) Obtenha um valor aproximado y_2 para $y(0.2)$ usando o método de Euler com passo $h = 0.1$.

b) Recorrendo a um resultado teórico, deduza um majorante para $|y(0.2)-y_2|$. Compare com o valor do erro de facto cometido.

c) Utilize o método de Taylor de ordem 2, com $h = 0.1$, para obter uma aproximação de $y(0.2)$. Compare com o resultado da alínea a).

R: a) $y_2 = 2.19$; b) $|y_2 - y(0.2)| \leq 0.648$; erro de facto cometido: $e_2 = 0.315$. c) $y_2 = 2.4636$.

2. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = \sin(x\,y(x)) & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) Aplique o método de Euler com $h = 0.1$ e calcule uma aproximação para $y(0.2)$.

b) Obtenha um majorante para o erro absoluto do valor obtido na alínea anterior, desprezando erros no valor inicial y_0.

c) Qual deverá ser o valor do passo h para poder garantir um erro absoluto não superior a 10^{-4} no valor calculado na alínea b)?

3. Utilize o método do ponto médio para obter uma aproximação da solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = x + y(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

no ponto $x = 0.1$ com espaçamentos $h = 0.1, 0.05, 0.025$. Sabendo que a solução exacta deste problema é dada por $y(x) = e^x - 1 - x$, compare os resultados obtidos com o valor exacto de $y(0.1)$. Comente.

R: $h = 0.1,\ y_1 = 0.005$; erro: 1.7×10^{-4}; $h = 0.05,\ y_2 = 0.0051266$; erro: 4.4×10^{-5}; $h = 0.025,\ y_4 = 0.00515962$; erro: 1.1×10^{-5}. Quando se reduz o passo para metade, o erro diminui aproximadamente 4 vezes, visto tratar-se de um método de segunda ordem.

4. Considere o seguinte problema de valores iniciais para uma equação diferencial de segunda ordem

$$\begin{cases} y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

a) Determine o valor aproximado de $y(1)$, pelo método de Euler com $h = 0.5$.

b) Idem, mas pelo método do ponto médio.

5. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) - x^2 + 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 0.5 \end{cases}$$

com solução exacta dada por $y(x) = 1 + 2\,x + x^2 - 0.5\,e^x$.

a) Obtenha um valor aproximado para $y(1)$ pelo método de Heun com $h = 0.2$.

b) Idem, mas pelo método do ponto médio.

c) Idem, mas pelo método de Taylor de ordem 2.

d) Compare as soluções aproximadas obtidas nas alíneas anteriores com a solução exacta. Comente.

6. Verifique que o método do ponto médio, quando aplicado ao problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = -20\, y(x) & 0 \le x \le 20 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

resulta na fórmula de recorrência

$$y_{n+1} = (1 - 20h + 200h^2)^{n+1}, \ \forall n \ge 0.$$

a) Aplique este método (com $h = 0.1$) para obter um valor aproximado de $y(1)$ e compare o resultado com o valor exacto, sabendo que a solução do problema anterior é $y(x) = \exp(-20x)$.

b) Se $h > 0.1$ o que acontece com a solução fornecida por este método de Runge-Kutta? Comente.

7. Considere o problema de Cauchy

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} y'(t) = -t\, y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

com a solução (única) $y(t) = e^{-t^2/2}$.

a) Compare o valor exacto de $y(2)$ com o valor aproximado dado pelo método de Euler, considerando $h = 1, h = 0.5$.

b) Apresente estimativas de erro para os valores obtidos em a), e determine o número de passos de forma a garantir um erro absoluto inferior a 10^{-6} (considerando que o valor inicial é exacto).

R: a) com $h = 1, y(2) \approx y_2 = 0$; com $h = 0.5, y(2) \approx y_4 = 0.09375$. b) Estimativa do erro: para $x_n = 2$, $|y_n - y(x_n)| \le h\frac{e^4-1}{4}$.

8. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - \dfrac{y(x)}{x} & 2 \le x \le 3 \\ y(2) = 2 \end{cases}$$

com solução exacta dada por $y(x) = x/2 + 2/x$. Determine um valor aproximado para $y(2.1)$ pelo método de Euler com $h = 0.1, 0.05, 0.025$. Confirme que a convergência do método de Euler é de ordem 1.

R: $h = 0.1$, $y_1 = 2$; erro: 0.00238; $h = 0.05$, $y_2 = 2.0012$; erro: 0.0012; $h = 0.025$, $y_4 = 2.0018$; erro: 0.0006. Quando se reduz o passo para metade, o erro também diminui aproximadamente para metade pois o método de Euler é de ordem 1.

9. Considere o problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^x & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \end{cases}$$

Obtenha valores aproximados para $y(0.2)$ e $y'(0.2)$ pelo método de Euler com passo $h = 0.1$.

10. Considere o seguinte problema de valores iniciais para uma equação diferencial de segunda ordem

$$\begin{cases} u''(x) = u(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = 0 \end{cases}$$

a) Aplique o método de Euler com $h = 0.25$, para determinar a aproximação de $u(1)$, e compare com a solução exacta do problema.

b) O mesmo que em a), mas usando o método do ponto-médio (RK de ordem 2).

c) Considere agora a equação de segunda ordem

$$\begin{cases} u''(x) = u^3(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

e aproxime $u(1)$ usando o método do ponto médio com $h = 0.5, h = 0.25, h = 0.1$.

d) O mesmo que em c) para $u''(x) = u'(x)u(x)^2 - x\, u'(x)^2$.