Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática
Unidade de Ensino de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Exame de Matemática Computacional – 11/01/2016 - Parte I - Resolução

Cursos: MEFT, MEBiol, MEBiom, MEQ, LEMat

1. Considere o sistema de vírgula flutuante $FP(10, n, t_-, t_+)$.

(a) Diga, justificando, quantos números pertencem ao conjunto $FP(10, n, t_-, t_+)$. **[1.0]**

Resolução: O número de elementos positivos é $N = 9 \cdot 10^{n-1} (t_+ - t_- + 1)$. O número total é $2N + 1$ (os elementos positivos, negativos e o zero).

(b) Qual é a distância entre 1 e o número mais próximo em $FP(10, n, t_-, t_+)$ maior que 1? **[1.0]**

Resolução: A distância entre $x = 0.1 \cdot 10^1$ e $y = 0.100 \ldots 1 \cdot 10^1$ é 10^{1-n}.

2. Considere a função $f(x) = x \sin x - 1$ no intervalo $I = [\pi/4, \pi/2]$.

(a) Mostre que f tem um único zero em I. **[0.5]**

Resolução: A função $f \in C^\infty(I)$. Mais, $f'(x) = x \cos x + \sin x > 0 \ \forall x \in I$ e $f(\pi/2) = 0.57 > 0$, $f(\pi/4) = -0.44 < 0$. Assim existe um único zero de f no intervalo I.

(b) Determine um intervalo $[a, b]$, de comprimento não inferior a 0.5, em que o método iterativo **[1.5]**

$$x_{n+1} = 1/\sin x_n\,, \qquad n = 0, 1, \ldots\,, \tag{1}$$

convirja para $z \in I$ qualquer que seja $x_0 \in [a, b]$.

Resolução: Seja $g(x) = 1/\sin x$ e considere o intervalo $I = [1, 1.5]$. Note-se que $g \in C^\infty(I)$ e

$$f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = g(x)\,.$$

Tem-se

$$g'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} < 0 \ \ \forall x \in I\,, \quad g(1.0) = 1.1884 \in I\,, \quad g(1.5) = 1.0025 \in I \quad \Rightarrow \quad g(I) \subset I\,.$$

Além disso

$$g''(x) = \frac{\sin^3 x + 2 \sin x \cos^2 x}{\sin^4 x} > 0 \ \ \forall x \in I\,, \quad g'(1.0) = -\,0.76306\,, \quad g'(1.5) = -\,0.071093\,.$$

Segue-se que $\max_{x \in I} |g'(x)| = 0.76306 < 1$, ou seja, as condições do Teorema do Ponto Fixo estão satisfeitas em I e o método iterativo (1) converge para $z \in I$, o ponto fixo único de g, qualquer que seja $x_0 \in I$.

(c) Partindo de $x_0 = 1.0$, obtenha pelo método (1) uma aproximação do zero z de f com um erro inferior a 10^{-1}. **[1.0]**

Resolução: Temos $g'(x) = -\,\cos x (\sin x)^{-2} \in (-1, 0) \ \ \forall x \in I$ ou seja a convergência é alternada. Assim $|z - x_n| \leq |x_n - x_{n-1}|\,,\ n = 1, 2, \ldots$. Segue-se que

$$x_1 = g(x_0) = 1.1884\,, \quad |x_1 - x_0| = 0.188 > 10^{-1}\,,$$

$$x_2 = g(x_1) = 1.07785\,, \quad |x_2 - x_1| = 0.111 > 10^{-1}\,, \quad x_3 = 1.13515\,, \quad |x_3 - x_2| = 0.0573 < 10^{-1}\,.$$

Portanto $z \approx x_3 = 1.14$.

3. Seja $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ uma matriz simétrica cujos valores próprios são

$$\lambda_1 = -\,0.125 \cdot 10^{-5}\,, \qquad \lambda_2 = 2.23 \cdot 10^{0}\,, \qquad \lambda_3 = 0.198 \cdot 10^{4}\,.$$

(a) O que pode dizer sobre o condicionamento da matriz A? **[1.0]**

Resolução: O número de condição, associado ao raio espectral, da matriz A é:

$$\mathrm{cond}_\rho(A) = \rho(A)\,\rho(A^{-1}) = \frac{\max_{1\le j\le 3}|\lambda_j|}{\min_{1\le j\le 3}|\lambda_j|} = \frac{|\lambda_3|}{|\lambda_1|} = 1.6\cdot 10^{9}\,.$$

Tem-se $\rho(A) \le \|A\|$ para qualquer norma matricial induzida $\|\cdot\|$, e $\rho(A) = \|A\|_2$ visto que a matriz A é simétrica. Assim $\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2\,\|A^{-1}\|_2 = \mathrm{cond}_\rho(A) \gg 1$, ou seja a matriz A é mal condicionada.

(b) Considere o sistema linear $Ax = b$ cujo segundo membro $b = (1,1,1)$ é afectado de um erro tal que $\|b - \tilde{b}\|_2 = 10^{-10}$. Obtenha um majorante para o erro relativo da solução $\tilde{x}$ do sistema linear $A\tilde{x} = \tilde{b}$ na norma $\|\cdot\|_\infty$. **[1.0]**

Resolução: Visto que a matriz A é simétrica, temos para o erro relativo de $\tilde{x}$:

$$\begin{aligned}\|\delta_{\tilde{x}}\|_\infty &\le \|\delta_{\tilde{x}}\|_2 \le \|A\|_2\|A^{-1}\|_2\,\|\delta_{\tilde{b}}\|_2 = \mathrm{cond}_2(A)\,\frac{\|b-\tilde{b}\|_2}{\|b\|_2} = \mathrm{cond}_\rho(A)\frac{\|b-\tilde{b}\|_2}{\|b\|_2}\\ &= 1.6\cdot 10^{9}\,\frac{10^{-10}}{\sqrt{3}} \approx 0.9\cdot 10^{-1} = 9\,\%\,.\end{aligned}$$

4. Considere o o sistema não linear

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 0\\ \quad\;\; 2xy &= 1\,,\end{cases}$$

e a sua resolução numérica pelo método de Newton a partir de $\mathbf{x}^{(0)} = (\alpha,\alpha)$, em que $\alpha > 0$.

(a) Mostre que a primeira iterada obtida pelo método de Newton é **[1.5]**

$$\mathbf{x}^{(1)} = \left(\frac{1}{4\alpha} + \frac{\alpha}{2}, \frac{1}{4\alpha} + \frac{\alpha}{2}\right)\,.$$

Resolução: Seja $\mathbf{F}(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy - 1)$. O método de Newton escreve-se

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{J}_{\mathbf{F}}^{-1}(\mathbf{x}^{(n)})\,\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(n)})\,, n = 0,1,\dots \qquad (2)$$

onde $\mathbf{x} = (x,y)$ e $\mathbf{J}_{\mathbf{F}}$ é a matriz jacobiana de $\mathbf{F}$ dada por

$$\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}\,.$$

Segue-se que

$$\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}^{(0)})\,\Delta\mathbf{x}^{(0)} = -\,\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2\alpha & -2\alpha \\ 2\alpha & 2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x_1^{(0)} \\ \Delta x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - 2\alpha^2 \end{pmatrix}$$

onde $\Delta\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}$. Assim

$$\Delta x_1^{(0)} = \Delta x_2^{(0)} = \frac{1}{4\alpha} - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\alpha} - \frac{\alpha}{2} \\ \\ \frac{1}{4\alpha} - \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\alpha} + \frac{\alpha}{2} \\ \\ \frac{1}{4\alpha} + \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}.$$

(b) Mostre que o método de Newton converge, com ordem de convergência quadrática, para a solução $(x, y) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ do sistema não linear, desde que $\alpha \geq 1/\sqrt{6}$. **[1.5]**

Resolução: O método de Newton (2) é da forma $\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(n)}), n = 0, 1 \ldots$ ou seja, é um método iterativo do tipo ponto fixo. Para $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} > 0$ temos $x_1^{(1)} = x_2^{(1)} > 0$ e mais geralmente $x_1^{(n)} = x_2^{(n)} > 0$, $n = 1, 2, \ldots$. O método (2) reduz-se assim a um método do ponto fixo em $\mathbb{R}$ (para cada componente) com a função iteradora $g(x) = \frac{1}{4x} + \frac{x}{2}$.

Seja $\alpha > 1/\sqrt{6}$ e considere o intervalo $I_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$, se $\alpha \leq 1/\sqrt{2}$, e o intervalo $I_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha\right]$ se $\alpha > 1/\sqrt{2}$. Temos

$$g \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4x^2}, \quad g''(x) = \frac{1}{2x^3}, \quad g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$g'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0, \quad g''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}, \quad g'\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -1, \quad g'(x) \in (-1, 0) \ \ \forall x \in \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$g'(x) \in (0, 1/2) \ \ \forall x > \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad g\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}} \in I_1, \quad g\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{7}{4\sqrt{6}} \in I_1.$$

Além disso $g(\alpha) = \frac{1}{4\alpha} + \frac{\alpha}{2} \in I_2$ se $\alpha > 1/\sqrt{2}$. Em ambos os casos o método iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$ converge com ordem de convergência quadrática para o ponto fixo positivo $z = 1/\sqrt{2}$ de g. A convergência é monótona pelo menos a partir da iterada x_1. Visto que $g\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}} > \frac{1}{\sqrt{6}}$ o método converge qualquer que seja $\alpha \geq \frac{1}{\sqrt{6}}$.