Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática
Unidade de Ensino de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Exame/Teste de Recuperação de Matemática Computacional – 11/01/2016 - Parte II

Cursos: MEFT, MEBiol, MEBiom, MEQ, LEMat

1. Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

x_i	0	2	4
$f(x_i)$	-14	4	-2

(a) Suponha que $f[2,4,5] = 2$ e determine o polinómio p que interpola f nos pontos da tabela e no ponto $x = 5$. **[1.5]**

Resolução: Tendo em conta as seguintes diferenças divididas de Newton

$$f[0,2] = 9\,, \quad f[2,4] = -3\,, \quad f[0,2,4] = -3\,, \quad f[0,2,4,5] = \frac{f]2,4,5] - f[0,2,4]}{5-0} = \frac{2-(-3)}{5} = 1\,,$$

o polinómio interpoldaor, de grau ≤ 3, é dado por:

$$p_3(x) = -14 + 9\,x - 3\,x(x-2) + x(x-2)(x-4) = -14 + 23\,x - 9\,x^2 + x^3\,.$$

(b) Supondo que $f(6) = 16$, determine os valores das constantes a, b que minimizam a soma **[1.5]**

$$F(a,b) = \sum_{i=0}^{i=3} \left[f(x_i) - a\,x_i - b\,(x_i+1)^2 \right]^2,$$

onde $x_i = 2i, \quad i = 0,1,2,3$.

Resolução: Sejam $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 6$, $\phi_0(x) = x, \phi_1(x) = (x+1)^2$ e a função aproximadora $g(x) = a\,\phi_0(x) + b\,\phi_1(x)$. A solução única do problema de minimização $\min_{a,b\in\mathbb{R}} F(a,b)$ é obtida pela resolução do sistema normal:

$$\begin{bmatrix} (\phi_0,\phi_0) & (\phi_0,\phi_1) \\ (\phi_1,\phi_0) & (\phi_1,\phi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\phi_0, f) \\ (\phi_1, f) \end{bmatrix}$$

onde

$$(\phi_i,\phi_j) = \sum_{k=0}^{3} \phi_i(x_k)\phi_j(x_k)\,, \qquad (\phi_j, f) = \sum_{k=0}^{3} f(x_k)\phi_j(x_k)\,, \quad i,j = 0,1\,.$$

O sistema de equações normais fica assim

$$\begin{bmatrix} 56 & 412 \\ 412 & 3108 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96 \\ 756 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad a = -\frac{819}{269} = -3.04461, \quad b = \frac{174}{269} = 0.64684\,.$$

2. Pretende-se calcular um valor aproximado de $I = \int_1^2 \frac{e^{-x}}{x} dx$ com erro inferior a 5×10^{-4}.

(a) Sabendo que $\max_{x\in[1,2]} |f^{(4)}(x)| = 65\, e^{-1}$, calcule o valor aproximado de I pela regra de Simpson composta. **[1.5]**

Resolução: Seja $f(x) = e^{-x}/x$. Temos $f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Pela fórmula de erro da regra de Simpson composta:

$$|E_N^S(f)| = \frac{(b-a)\,h^4}{180}\,|f^{(4)}(\xi)| \leq \frac{h^4}{180} \max_{x\in[1,2]} |f^{(4)}(x)| = \frac{13\,e^{-1}}{36}\,h^4\,,$$

onde $h = 1/N$ e $N \geq 2$ é par. Temos

$$N = 2 : |E_2^S(f)| \leq \frac{13\,e^{-1}}{36}\,(0.5)^4 = 0.0083 > 5 \cdot 10^{-4}\,, \qquad N = 4 : |E_4^S(f)| \leq 5.2 \cdot 10^{-4} > 5 \cdot 10^{-4}\,,$$

$$N = 6 : |E_6^S(f)| \leq 1.0 \cdot 10^{-4} < 5 \cdot 10^{-4}\,, \qquad (N = 8 : |E_8^S(f)| \leq 3.2 \cdot 10^{-5} < 5 \cdot 10^{-4})\,.$$

Com $N = 6$, os nós de integração são:

$$x_j = 1 + jh, \quad j = 0, 1, \ldots 6\,, \qquad h = 1/6\,.$$

O valor aproximado de I é:

$$S_6(f) = \frac{1}{18}\left[f(x_0) + f(x_6) + 4\sum_{i=1}^{3} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{2} f(x_{2i})\right] = 0.170506\,.$$

(b) Determine o número de intervalos necessários para obter um valor aproximado de I com o mesmo erro, pela regra dos trapézios. **[1.0]**

Resolução: A fórmula de erro da regra dos trapézios composta é:

$$|E_N^T(f)| = \frac{h^2}{12} f''(\xi)| \leq \frac{h^2}{12} \max_{x\in[1,2]} |f''(x)|\,,$$

onde $f''(x) = e^{-x}\,x^{-1}(1 + 2\,x^{-1} + 2\,x^{-2})$. Assim $\max_{x\in[1,2]} |f''(x)| = 5e^{-1}$ e

$$|E_N^T(f)| \leq \frac{5\,e^{-1} h^2}{12} < 5 \cdot 10^{-4} \qquad \Leftrightarrow \qquad h < \sqrt{1.2 \cdot 10^{-3}\,e} = 0.057$$

Portanto $N = 1/h > 17.5$ ou seja o número de intervalos é 18.

(c) Se duplicasse o número de intervalos, de que modo seria afectado o erro em cada uma das regras (Simpson, trapézios)? Justifique a sua resposta. **[0.5]**

Resolução: Se duplicarmos o número de intervalos, i.e. $N \to 2N$, o valor de $h = 1/N$ fica dividido por dois, i.e. $h \to h/2$. Assim o erro da aproximação obtida pela regra dos trapézios passa de $E_N^T(f) \sim h^2$ para $E_{2N}^T(f) \sim (h/2)^2 = h^2/4$, i.e. o erro é dividido por 4. De ígual modo, o erro da aproximação obtida pela regra de Simpson composta passa de $E_N^S(f) \sim h^4$ para $E_{2N}^S(f) \sim (h/2)^4 = h^4/16$, ou seja o erro fica 16 vezes mais pequeno.

3. Determine os pesos A_0, A_1 e o valor de $h \in (0,1)$ de modo a que a fórmula de quadratura **[1.5]**

$$Q(f) = A_0\, f(-1) + A_1\, f(-1+h) + A_1\, f(1-h) + A_0\, f(1)\,,$$

para aproximar integrais do tipo $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$, tenha grau de precisão o mais elevado possível. Qual é esse grau de precisão? Deve apresentar os valores exactos de A_0, A_1 e h.

Resolução: Pelo método dos coeficiente indeterminados, temos

$$\begin{array}{l} Q(1) = 2A_0 + 2A_1 = 2 = I(1) \\ Q(x) = 0 = I(x) \\ Q(x^2) = 2A_0 + 2A_1\,(1-h)^2 = \dfrac{2}{3} = I(x^2) \\ Q(x^3) = 0 = I(x^3) \\ Q(x^4) = 2A_0 + 2A_1(1-h)^4 = \dfrac{2}{5}I(x^4) \end{array}$$

Segue-se que

$$\left.\begin{array}{r} 2A_1\,(1-(1-h)^2) = \dfrac{4}{3} \\[2ex] 2A_1\,(1-(1-h)^4) = \dfrac{8}{5} \end{array}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad 6\,(1-(1-h)^2) = 5\,(1-(1-h)^4)\,.$$

Seja $z = (1-h)^2$. Assim

$$5\,z^2 - 6\,z + 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \frac{1}{5} \;\text{ ou }\; z = 1 \qquad \Rightarrow \qquad h = 0, 2,\; \frac{5 \pm \sqrt{5}}{5}\,.$$

O único valor de h entre 0 e 1 é $h = \frac{5-\sqrt{5}}{5}$. Temos ainda

$$\left.\begin{array}{l} A_0 + A_1 = 1 \\[2ex] A_0 + \dfrac{A_1}{5} = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad A_0 = \frac{1}{6}\,, \quad A_1 = \frac{5}{6}\,.$$

Visto que

$$Q(x^5) = 0 = I(x^5)\,, \qquad Q(x^6) = \frac{1}{6}\left(2 + 2\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^6\right) = \frac{26}{75} \neq \frac{2}{7} = I(x^6)\,.$$

o grau de precisão da fórmula de quadratura $Q(f)$ é 5.

4. Considere o problema de valor inicial

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) & = & \dfrac{1}{1+y(t)^2}, \quad 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) & = & 1\,, \end{array}\right.$$

com solução exacta $y : [0,1] \to \mathbb{R}$. Seja $h > 0$ o passo de discretização do intervalo $[0,1]$.

(a) Obtenha um valor aproximado y_2 de $y(2h)$, usando o método de Euler progressivo (explícito). **[1.0]**

Resolução: Sejam $f(t,y) = 1/(1+y^2)$, $t_0 = 0, t_1 = h, t_2 = 2h$ e $y_0 = 1$. Aplicando o método de Euler explícito, com o passo $h > 0$, obtém-se:

$$y_1 = y_0 + h\, f(t_0, y_0) = y_0 + h\, \frac{1}{1+y_0^2} = 1 + \frac{h}{2}\,,$$

$$y_2 = y_1 + h\, \frac{1}{1+y_1^2} = 1 + \frac{h}{2} + h\, \frac{1}{1+(1+\frac{h}{2})^2} = 1 + \frac{h}{2} + \frac{4\,h}{8+4\,h+h^2}\,.$$

Portanto $y(2h) \approx y_2 = 1 + \frac{h}{2} + \frac{4\,h}{8+4\,h+h^2}$.

(b) Obtenha um majorante para o erro absoluto da aproximação obtida na alínea anterior. **[1.5]**

Fórmula de erro:

$$|y(2h) - y_2| \le \frac{hM}{2}\, \frac{e^{(t_2-t_0)K} - 1}{K}\,.$$

Tendo em conta que $y(0) = 1$ e $y'(t) > 0 \quad \forall t \ge 0$, temos $y(t) \ge 1 \quad \forall t \ge 0$. Assim

$$K = \max_{\substack{x\in[t_0,t_2]\\ y\in\mathbb{R}}} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \max_{\substack{x\in[t_0,t_2]\\ y\in\mathbb{R}}} \left|\frac{2\,y}{(1+y^2)^2}\right| \le \max_{\substack{x\in[t_0,t_2]\\ y\in\mathbb{R}}} \left|\frac{1+y^2}{(1+y^2)^2}\right| = \max_{\substack{x\in[t_0,t_2]\\ y\ge 1}} \left|\frac{1}{1+y^2}\right| = \frac{1}{2}\,,$$

$$M = \max_{t\in[t_0,t_2]} |y''(t)| = \max_{t\in[t_0,t_2]} \left|\frac{d}{dt} f(t,y(t))\right| = \max_{t\in[t_0,t_2]} \left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,y(t)) + y'(t)\, \frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t))\right|$$

$$= \max_{t\in[t_0,t_2]} \left|f(t,y(t))\, \frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t))\right| = \max_{t\in[t_0,t_2]} \left|\frac{2y(t)}{((1+y^2(t))^3}\right| \le \max_{t\in[t_0,t_2]} \left|\frac{1}{((1+y^2(t))^2}\right| = \frac{1}{4}\,,$$

Portanto

$$|y(x_2) - y_2| \le \frac{h}{4}\, \left(e^h - 1\right)\,.$$