

Exame – 3 de Fevereiro de 2017

1º Teste

1. Seja H um espaço de Hilbert e seja $T \in \mathcal{L}(H)$. O operador linear contínuo $T^* : H \rightarrow H$, definido por

$$(Tu, v) = (u, T^*v) \quad \forall u, v \in H,$$

diz-se *operador adjunto* de T . Mostre que existe $(I + T^*T)^{-1}$. [2.0]

2. Seja V um espaço de Banach, $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador tal que $\|T\| < 1$ e $f \in V$. Mostre que a equação $(I - T)u = f$ admite uma solução única $u \in V$ e que a sucessão $\{u_n\}$ definida por

$$u_0 \in V, \quad u_n = f + T u_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

converge para u quando $n \rightarrow \infty$. [2.0]

3. Considere a seguinte equação diferencial de valor inicial

$$\begin{cases} u''(t) = \frac{u(t) u'(t)}{1 + u^2(t)} + 2, & 0 < t < 1, \\ u(0) = \alpha, \quad u'(0) = \beta. \end{cases} \quad (1)$$

a) Escreva o problema (1) na forma $u = T(u)$, em que $T : V \rightarrow V$, com $V = C[0, 1]$, é um operador integral de Volterra de segunda espécie. [2.0]

b) Prove que o operador T tem um e um só ponto fixo $u \in V$. [2.0]

4. Considere o sistema não linear $F(x, y) = 0$ em que

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} x^3 + x y^2 \\ x^2 y + y^3 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Mostre que o método iterativo de Newton converge para a solução $x_* = [0 \ 0]^T$ do sistema (2) qualquer que seja a aproximação inicial da forma $x^{(0)} = [a \ a]^T$, $a \in \mathbb{R}$. Determine a ordem de convergência da iteração. [2.0]

Sugestão: Note-se que

$$J_F^{-1}(a, a) = \frac{1}{6a^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1º Semestre 2016/2017 – Formulário (1º Teste)

i. Normas matriciais ($A, B \in \mathbb{R}^{N \times N}$)

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq N} \sum_{i=1}^N |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 = \sqrt{r_\sigma(A^T A)}, \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N |a_{ij}|, \quad \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^N |a_{ij}|^2}$$

$$\|AB\|_F \leq \min \left\{ \|A\|_F \|B\|_2, \|A\|_2 \|B\|_F \right\}, \quad \|vw^T\|_2 = \|vw^T\|_F = \|v\|_2 \|w\|_2 \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^N.$$

ii. Método do ponto fixo num espaço de Banach V

$$T : V \rightarrow V, \quad T(u) = u, \quad u_{n+1} = T(u_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\|u - u_{n+1}\|_V \leq \alpha \|u - u_n\|_V, \quad \|u - u_{n+1}\|_V \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|u_{n+1} - u_n\|_V, \quad n = 0, 1, \dots$$

iii. Método de Newton em espaços de Banach

$$F : U \rightarrow V, \quad F(u) = 0.$$

Escolher $u_0 \in V$ tal que $F'(u_0) \neq 0$. Para $n = 0, 1, \dots$

1. Resolver o problema linear $F'(u_n) \Delta u_n = -F(u_n)$
2. Fazer $u_{n+1} = u_n + \Delta u_n$.

Mestrado em Matemática e Aplicações – Instituto Superior Técnico
Análise Numérica Funcional e Optimização

Exame – 3 de Fevereiro de 2017

2º Teste

1. Considere o funcional quadrático $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(x) = x^T A x + b^T x + c$, onde $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ é uma matriz simétrica e definida positiva, $b \in \mathbb{R}^N$ e $c \in \mathbb{R}$. Mostre que $f(x) \rightarrow +\infty$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$, i.e. mostre que a função f é coerciva. **[1.5]**

2. Considere o seguinte problema de minimização com restrições

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} \|x - x_0\|_2^2 \quad \text{sujeito a} \quad 1 - x^T A x \geq 0. \quad (3)$$

onde $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ é uma matriz simétrica e definida positiva e $x_0 \in \mathbb{R}^N$ é tal que $x_0^T A x_0 > 1$.

a) Escreva as condições KKT do problema. **[1.0]**

b) Mostre que a solução global é dada por

$$x_* = (I + \lambda^* A)^{-1} x_0,$$

onde $\lambda^* \geq 0$ satisfaz a equação $f(\lambda) = 1$, com $f(\lambda) = x_0^T (I + \lambda A)^{-1} A (I + \lambda A)^{-1} x_0$. **[1.5]**

c) Resolva o problema quando $A = I$. **[1.5]**

3. Considere o seguinte problema de minimização com restrições

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N x_j^2 \quad \text{sujeito a} \quad \sum_{j=1}^N x_j = 1, \quad (4)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_N)$.

a) Escreva a função de penalização quadrática $Q(x; \mu)$ para o problema (4) e calcule o gradiente $\nabla_x Q(x; \mu)$ e a matriz Hessiana $\nabla_x^2 Q(x, \mu)$ da função $Q(x; \mu)$. **[1.5]**

b) Mostre que, para cada $\mu_k > 0$ fixo, o problema de minimização sem restrições $\min_{x \in \mathbb{R}^N} Q(x, \mu_k)$ admite uma e uma só solução e que essa solução é global. **[1.0]**

c) Considere o problema de minimização da função de penalização quadrática $Q(x, \mu_1)$. Aproxime a solução do problema $\min_{x \in \mathbb{R}^2} Q(x, \mu_1)$ pelo método da descida máxima. Considere $\mu_1 = 1$, $x_0 = [0 \ 0]^T$ e efectue uma iteração. **[2.0]**

i. Minimização sem restrições $\min_{x \in \mathbb{R}^N} f(x)$

Método de descida máxima

Escolher $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Para $k = 0, 1, \dots$

Fazer $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$, em que $\alpha_k > 0$ resolve o problema de minimização

$$\min_{\alpha_k > 0} f(x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)).$$

Estimativa do erro:

$$|f(x_{k+1}) - f(x_*)| \leq \left(\frac{\lambda_N - \lambda_1}{\lambda_N + \lambda_1} \right)^2 |f(x_k) - f(x_*)|,$$

onde $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N$ são os valores próprios de $H_f(x_*)$.