Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Análise Numérica (LMAC/MMA/MEIC) – **Exame – 31 de Janeiro de 2017**

1º **Teste**

1. Determine, pelas diferenças divididas de Newton, o polinómio interpolador de Hermite de grau ≤ 5 que interpola a função $f(x) = \sin x$ e as suas **duas** primeiras derivadas nos pontos $x_0 = 1$ e $x_1 = \pi$. **[2.0]**

2. Seja $N(h)$ uma função tal que

$$I = N(h) + h + h^2 + h^3 \,, \qquad \forall\, h \in (0,1)\,.$$

Obtenha, pela extrapolação de Richardson, uma nova função $N^*(h)$ tal que $I - N^*(h) = \mathcal{O}(h^3)$. **[2.0]**

3. Resolva o problema de minimização

$$\min_{p_2 \in \mathcal{P}_2[-1,1]} \; \max_{x\in[-1,1]} |p_2(x) - 4x^3 + 3x|\,.$$

isto é, determine a função $p_2^* \in \mathcal{P}_2[-1,1]$ que minimiza a norma $\max_{x\in[-1,1]} |p_2(x) - 4x^3 + 3x|$ e calcule o valor $\rho = \max_{x\in[-1,1]} |p_2^*(x) - 4x^3 + 3x|$. **[2.0]**

4. Aproxime o integral $I = \int\limits_0^1 \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x$ pela quadratura de Gauss-Chebyshev com 3 pontos. **[2.0]**

5. Considere, para a aproximação numérica do integral $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, a fórmula de quadratura de Gauss-Legendre $Q_n(f) = \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j)$. Sabendo que

$$A_j = \int_{-1}^{1} l_j(x)\,dx\,, \qquad j = 0,1,\ldots,n\,,$$

em que os $l_j, j = 0,1,\ldots,n$, são os polinómios de Lagrange associados aos zeros do polinómio de Legendre P_{n+1}, mostre que os pesos A_j podem ser determinados pelas fórmulas

$$A_j = \frac{1}{P'_{n+1}(x_j)} \int_{-1}^{1} \frac{P_{n+1}(x)}{x - x_j}\,dx\,, \qquad j = 0,\ldots,n\,. \qquad [\mathbf{2.0}]$$

Formulário (1º Teste)

i. Interpolação de Lagrange

Fórmula interpoladora de Lagrange:

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j \, l_j(x) \,, \qquad l_j(x) = \prod_{k=0, k\neq j}^{n} \left(\frac{x - x_k}{x_j - x_k} \right) \,, \qquad f_j = f(x_j) \,, \quad j = 0, \ldots, n$$

Fórmula interpoladora de Newton:

$$p_n(x) = f[x_0] + \sum_{j=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_j](x - x_0) \cdots (x - x_{j-1})$$

ii. Interpolação de Hermite

$$H_{3n+2}(x) = f[x_0] + (x - x_0)\, f[x_0, x_0] + (x - x_0)^2\, f[x_0, x_0, x_0] + (x - x_0)^3\, f[x_0, x_0, x_0, x_1] +$$

$$+ \ldots + \left(\prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j)^3 \right) (x - x_n)^2\, f[x_0, x_0, x_0, \ldots, x_n, x_n, x_n]$$

iii. Polinómios ortogonais com respeito ao produto interno $(f, g)_w = \int_a^b w(x) f(x) g(x)\, dx$

$$[a, b] \ni t \longrightarrow x \in [-1, 1] \; : \quad t = \frac{a + b + (b - a)\, x}{2}$$

Polinómios de Legendre: $(a, b) = (-1, 1)$, $\quad w(x) = 1 \,,\quad (f, g)_w = (f, g) = \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \Big[(x^2 - 1)^n \Big], \; n = 0, 1, \ldots \qquad (P_n, P_n) = \frac{2}{2n + 1}$$

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_{n+1}(x) = \frac{1}{n + 1} \Big[(2n + 1)\, x\, P_n(x) - n\, P_{n-1}(x) \Big], \; n = 1, 2, \ldots$$

Polinómios de Chebyshev: $(a, b) = (-1, 1)$, $\quad w(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \,,\quad (f, g)_w = \int_{-1}^{1} \frac{f(x) g(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \,, \quad n = 0, 1, \ldots \qquad (T_0, T_0)_w = \pi \,, \qquad (T_n, T_n)_w = \frac{\pi}{2} \,, \; n \geq 1$$

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2\, x\, T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$T_{n+1}(t_j) = 0 \,, \qquad t_j = \cos \frac{(2j + 1)\, \pi}{2n + 2}, \qquad j = 0, \ldots, n \,, \qquad T_{n+1}(x) = 2^n \prod_{j=0}^{n} (x - t_j)$$

iv. Fórmulas de quadratura de Gauss $\quad I_w(f) = \int_a^b w(x) f(x)\, dx \approx I_{n,w}(f) = \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j)$

Quadraturas de Gauss–Legendre:

$$I_w(f) = I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx \,, \qquad I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j)$$

$$I(f) - I_n(f) = \frac{2^{2n+3} [(n + 1)!]^4}{(2n + 3) [(2n + 2)!]^2} \; \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n + 2)!} \,, \qquad \xi \in \,]-1, 1[$$

Quadraturas de Gauss–Chebyshev:

$$I_w(f) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \,, \qquad I_{n,w}(f) = \frac{\pi}{n + 1} \sum_{j=0}^{n} f(x_j)$$

$$I_w(f) - I_{n,w}(f) = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \; \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n + 2)!} \,, \qquad \xi \in \,]-1, 1[$$

2^{o} **Teste**

1. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$ dois vectores coluna tais que $\|x\|_2 = \|y\|_2$ e $x \neq y$, seja $w = \frac{x-y}{\|x-y\|_2}$ e considere a matriz de Householder $U = I - 2ww^T$. Mostre que $Ux = y$. **[2.0]**

2. A matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

possui um valor próprio dominante $\lambda_1 \approx 5.2$. Aproxime λ_1 pelo método das potências. Considere $q^{(0)} = [1\ 0\ 0]^T$ e efectue duas iterações **[2.0]**

3. Considere o seguinte método multipasso linear a 3 passos

$$y_{n+3} - y_n = \frac{3h}{2}\Big(f(x_{n+3}, y_{n+3}) + f(x_n, y_n)\Big), \quad n \geq 0\,. \tag{1}$$

Analise a consistência, zero-estabilidade e convergência do método (1). Determine a sua ordem. **[2.0]**

4. A função de estabilidade de um método Runge-Kutta de s etapas é dada por

$$R(\overline{h}) = 1 + \overline{h}\, b^T (I - \overline{h} A)^{-1}\, \mathbf{1}\,,$$

onde $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{s \times s}, b = [b_1\ b_2\ \ldots\ b_s]^T \in \mathbb{R}^s$ e $\mathbf{1} = [1\ 1\ \ldots\ 1]^T \in \mathbb{R}^s$.

Prove que a função de estabilidade reduz-se a

$$R(\overline{h}) = 1 + \sum_{r=1}^{s} b^T A^{r-1}\, \mathbf{1}\, \overline{h}^{\,r}\,.$$

se o método for explícito. **[2.0]**

5. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(t) + t\, y'(t) + 2\, y(t) = 0\,, & t \geq 0 \\ y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,. \end{cases} \tag{2}$$

Obtenha uma aproximação de $y(h)$ pelo método do ponto médio implícito

$$y_{n+1} = y_n + h\, k_1\,, \quad k_1 = f\Big(t_n + \frac{h}{2}\,, y_n + \frac{h}{2} k_1\Big)\,, \quad n \geq 0\,.$$

onde $h > 0$. **[2.0]**

Sugestão: Escreva o problema (2) na forma vectorial

$$Y'(t) = A(t)\, Y(t), \qquad Y(0) = [1\ \ 0]^T\,,$$

em que $Y(t) = [y(t)\ y'(t)]^T \in \mathbb{R}^2$ e $A(t) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Note-se também que

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{h}{2} \\ h & 1 + \frac{h^2}{4} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{3h^2}{4}} \begin{bmatrix} 1 + \frac{h^2}{4} & \frac{h}{2} \\ -h & 1 \end{bmatrix}.$$

Formulário (2º Teste)

i. Normas matriciais ($A \in \mathbb{C}^{N\times N}$)

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le N} \sum_{i=1}^{N} |a_{ij}|, \qquad \|A\|_2 = \sqrt{r_\sigma(A^*A)}, \qquad \|A\|_\infty = \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|, \qquad r_\sigma(A) = \max_{1\le i\le N} |\lambda_i|$$

ii. Determinação de valores e vectores próprios

Matriz de Householder: $U = I - 2\,w\,w^T$, $w \in \mathbb{R}^N$, $\|w\|_2 = 1$, $U^{-1} = U^T = U$

Método das potências: $q^{(0)} \in \mathbb{C}^N$, $\|q^{(0)}\|_2 = 1$

$$z^{(k)} = A\,q^{(k-1)}\,, \qquad q^{(k)} = \frac{z^{(k)}}{\|z^{(k)}\|_2}\,, \qquad \lambda^{(k)} = [q^{(k)}]^* A\,q^{(k)}\,, \qquad k = 1, 2, \dots$$

iii. Resolução numérica de equações diferenciais ordinárias – problemas de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t > t_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Métodos multipasso lineares a p passos:

$$\sum_{j=0}^{p} a_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{p} b_j f(t_{n+j}, y_{n+j})\,, \qquad n \ge 0$$

Consistência e ordem:

$$\sum_{j=0}^{p} a_j = 0\,, \qquad \sum_{j=0}^{p} j^k a_j = k \sum_{j=0}^{p} j^{k-1} b_j\,, \qquad k = 1, \dots, q$$

Polinómio de estabilidade:

$$\pi(r; \overline{h}) = \rho(r) - \overline{h}\,\sigma(r)\,, \qquad \rho(r) = \sum_{j=0}^{p} a_j r^j\,, \qquad \sigma(r) = \sum_{j=0}^{p} b_j r^j$$

Métodos de Runge-Kutta de s etapas:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \displaystyle\sum_{i=1}^{s} b_i k_i\,, \\ k_i = f\Big(t_n + c_i h,\, y_n + h \displaystyle\sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j\Big), \quad i = 1, \dots, s\,, \\ c_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\,, \quad i = 1, \dots, s\,. \end{cases}$$

Tabela de Butcher:

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_s \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

Consistência e ordem (≤ 3):

$$\sum_{i=1}^{s} b_i = 1\,, \qquad \sum_{i=1}^{s} b_i c_i = \frac{1}{2}\,, \qquad \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^2 = \frac{1}{3}\,, \qquad \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}$$

Função de estabilidade:

$$R(\overline{h}) = 1 + \overline{h}\,b^T (I - \overline{h}A)^{-1}\,\mathbf{1}\,, \qquad \mathbf{1} = [1\ 1\ \dots\ 1]^T \in \mathbb{R}^s$$