Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Análise Numérica (LMAC/MMA/MEIC) – 1º **Exame – 16 de Janeiro de 2017 – Resolução**

1º **Teste**

1. Considere os seguintes valores tabelados de uma função $f \in C^2[0,1]$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	1	0	–
1	2	1	2

Determine o polinómio de Hermite H_4 que interpola f e as suas derivadas nos pontos da tabela. **[2.0]**

Resolução: Considerando as diferenças divididas de Newton, temos a tabela

x_i	f_i	$f[\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ,\ ]$
0	1	–	–	–	–
0	1	0	–	–	–
1	2	1	1	–	–
1	2	1	0	-1	–
1	2	1	1	1	2

Note-se que $f[0,0] = f'(0) = 0, f[1,1] = f'(1) = 1$ e $f[1,1,1] = \frac{f''(1)}{2} = 1$. O polinómio interpolador de Hermite é assim

$$H_4(x) = 1 + x^2 - x^2(x-1) + 2x^2(x-1)^2 = 1 + 4x^2 - 5x^3 + 2x^4 \,.$$

2. Seja p_2 o polinómio de grau ≤ 2 que interpola $f \in C^4[x_0, x_2]$ nos pontos $x_0 = z - h, x_1 = z$ e $x_2 = z + h, h > 0$.

a) Obtenha uma aproximação para $f''(z)$ utilizando o polinómio p_2. **[1.0]**

Resolução: Temos

$$p_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1)\,,$$

$$p_2''(x) = 2\,f[x_0, x_1, x_2] = 2\,\frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{f(x_2) - 2\,f(x_1) + f(x_0)}{h^2}\,.$$

Portanto

$$f''(z) \approx p_2''(z) = \frac{f(z+h) - 2\,f(z) + f(z-h)}{h^2}\,.$$

b) Baseando-se na fórmula de erro de interpolação,

$$f''(x) - p_2''(x) = \frac{f^{(5)}(\xi_3)}{5!}\,W_3(x) + 2\,\frac{f^{(4)}(\xi_2)}{4!}\,W_3'(x) + \frac{f^{(3)}(\xi_1)}{3!}\,W_3''(x)\,, \quad \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (x_0, x_2)\,,$$

em que $W_3(x) = (x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2)$, mostre que

$$f''(z) - p_2''(z) = -\,\frac{f^{(4)}(\xi)}{12}\,h^2\,, \qquad \xi \in (z-h, z+h)\,.$$ **[1.0]**

Resolução: Tendo em conta que

$$W_3(x) = (x-z)\,((x-z)^2 - h^2)\,, \quad W_3'(x) = ((x-z)^2 - h^2) + 2\,(x-z)^2\,, \quad W_3''(x) = 6\,(x-z)\,,$$

temos

$$W_3(z) = W_3''(z) = 0\,, \qquad W_3'(z) = -\,h^2\,.$$

Portanto

$$f''(z) - p_2''(z) = 2\,\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,W_3'(z) = -\,\frac{f^{(4)}(\xi)}{12}\,h^2\,, \quad \xi \in (z-h, z+h)\,.$$

3. Determine a melhor aproximação uniforme de $f(x) = \ln(x^2+1)$ em $\mathcal{P}_2[-1,1]$. **[2.0]**

Resolução: Note-se que uma função $p_2 \in \mathcal{P}_2[-1,1]$ tem, quando muito, dois zeros em $[-1,1]$ e $\dim(\mathcal{P}_2[-1,1]) = 3$. Portanto $\mathcal{P}_2[-1,1]$ satisfaz a condição de Haar e assim existe uma e uma só melhor aproximação uniforme de f em $\mathcal{P}_2[-1,1]$. Seja p_2^* essa melhor aproximação.

Pela condição de equioscilação de Chebyshev, devem existir pelo menos $4 = \dim(\mathcal{P}_2[-1,1]) + 1$ pontos distintos x_j tais que:

$$f(x_j) - p_2^*(x_j) = \pm(-1)^j \delta\,, \quad j = 0,1,2,3\,, \qquad \text{onde} \qquad \delta = \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_2^*(x)|\,.$$

Por outro lado, a melhor aproximação uniforme de uma função par f num intervalo simétrico em relação à origem deve ser uma função par. Supondo que $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$, temos então pela simetria $x_0 = -x_3$ e $x_1 = -x_2$ e

$$f(x_0) - p_2^*(x_0) = f(x_3) - p_2^*(x_3)\,, \qquad f(x_1) - p_2^*(x_1) = f(x_2) - p_2^*(x_2)\,.$$

Portanto, a condição da equioscilação só pode ser válida se existir pelo menos mais um ponto, digamos x_4, entre x_1 e x_2 tal que

$$f(x_4) - p_2^*(x_4) = -\left(f(x_1) - p_2^*(x_1)\right).$$

Mas isto só é possível se $x_4 = 0$; se $x_4 \neq 0$ então $-x_4$ seria também um ponto de equioscilação.

Seja então $p_2^*(x) = a_0 + a_2 x^2$ (uma função par em $\mathcal{P}_2[-1,1]$) e define-se $r(x) = f(x) - p_2^*(x)$. Temos

$$r'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - 2a_2 x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \;\text{ ou }\; x = \pm\sqrt{\frac{1-a_2}{a_2}}\,.$$

Como só existem três pontos críticos de r, os extremos do intervalo devem ser pontos de equioscilação, i.e. $x_0 = -1$ e $x_3 = 1$. Temos

$$r(\pm 1) = \ln 2 - a_0 - a_2 = \delta = r(0) = -a_0 \qquad \Rightarrow \qquad a_2 = \ln 2\,, \;\; a_0 = -\,\delta\,.$$

Além disso,

$$r\Big(\pm\sqrt{\frac{1-a_2}{a_2}}\Big) = \ln(a_2)^{-1} - a_0 - (1-a_2) = -\,\delta = a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{a_2 - 1 - \ln a_2}{2} = \frac{\ln 2 - 1 - \ln(\ln 2)}{2}\,.$$

Portanto a melhor aproximação uniforme de $f(x) = \ln(x^2+1)$ em $\mathcal{P}_2[-1,1]$ é

$$p_2^*(x) = \frac{\ln 2 - 1 - \ln(\ln 2)}{2} + \ln 2\, x^2\,.$$

4. Aproxime o integral $I = \int_{-1}^{-1} \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x$ pela quadratura de Gauss-Legendre com 3 pontos. **[2.0]**

Resolução: Os nodos de integração x_0, x_1, x_2, são os zeros do polinómio de Legendre P_3. Temos

$$P_0(x) = 1\,, \qquad P_1(x) = x\,, \qquad P_2(x) = \frac{3}{2}\,x\,P_1(x) - \frac{1}{2}\,P_0(x) = \frac{1}{2}\,(3x^2 - 1)\,,$$

$$P_3(x) = \frac{5}{3}\,x\,P_2(x) - \frac{2}{3}\,P_1(x) = \frac{1}{2}\,(5x^3 - 3x) \qquad \Rightarrow \qquad x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}\,, \;\; x_1 = 0\,, \;\; x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}\,.$$

Os pesos podem ser determinados pelo método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} I(1) = 2 = A_0 + A_1 + A_2 = Q_2(1)\,, \\[2ex] I(x) = 0 = (A_0 - A_2)\,x_0 = Q_2(x)\,, \\[2ex] I(x^2) = \frac{2}{3} = (A_0 + A_2)\,x_0^2 = O_2(x^2) \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad 2A_2 x_0^2 = \frac{2}{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad A_0 = A_2 = \frac{5}{9}\,, A_1 = \frac{8}{9}\,.$$

A quadratura de Gauss-Legendre fica assim:

$$Q_2(f) = \frac{1}{9}\Big(5\,f\Big(-\sqrt{\frac{3}{5}}\Big) + 8\,f(0) + 5\,f\Big(\sqrt{\frac{3}{5}}\Big)\Big)\,.$$

Portanto o valor aproximado de $I = \int\limits_{-1}^{-1} \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x$ é:

$$Q_2 = \frac{1}{9}\Big(5\,\ln\Big(1+\frac{3}{5}\Big) + 0 + 5\,\ln\Big(1+\frac{3}{5}\Big)\Big) = \frac{10}{9}\;\ln\Big(1+\frac{3}{5}\Big) \approx 0.522226\,.$$

5. Considere a quadratura de Gauss-Legendre $Q_n(f) = \sum_{j=0}^{n} A_j\,f(x_j)$ para a aproximação numérica do integral $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$. Mostre que os pesos $A_j, j = 0,\ldots,n$, da quadratura Q_n são positivos. **[2.0]**

Resolução: A quadratura de Gauss-Legendre $Q_n(f) = \sum_{j=0}^{n} A_j\,f(x_j)$ tem grau de precisão $2n+1$ e os nodos de integração $x_j, j = 0,\ldots,n$, são os zeros distintos do polinómio de Legendre P_{n+1}.

Considere os polinómios de grau $2n$:

$$p_k(x) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} (x - x_i)^2\,, \qquad k = 0,1,\ldots,n\,,$$

onde os $x_i, j = 0,\ldots,n$, são os zeros do polinómio de Legendre P_{n+1}. Tendo em conta que

$$p_k(x) \geq 0 \quad \forall\, x\in\mathbb{R}\,, \qquad\qquad p_k(x_j) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } \; j\neq k \\ \prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} (x_k - x_i)^2 > 0 \;, & \text{se } \; j = k \end{cases}$$

temos

$$I(p_k) = \int\limits_{-1}^{1} p_k(x)\,\mathrm{d}x > 0\,, \qquad Q_n(p_k) = \sum_{j=0}^{n} A_j\,p_k(x_j) = A_k \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} (x_k - x_i)^2\,, \qquad k = 0,1,\ldots,n\,.$$

Por outro lado, $I(p_k) = Q_n(p_k)$, visto que p_k é um polinómio de grau $2n$. Assim

$$A_k > 0\,, \qquad k = 0,1,\ldots,n\,.$$

2^o **Teste**

1. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -0.5 & -2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Localize, pelo teorema de Gerschgorin, os valores próprios de A. **[2.0]**

Resolução: Os círculos de Gerschgorin, associadas às linhas da matriz A, são

$$Z_1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-6| \leq 3.5\}, \qquad Z_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-4| \leq 1\},$$

$$Z_3 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z+3| \leq 3\}, \qquad Z_4 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 2\}.$$

e os círculos, associadas às colunas, escrevem-se:

$$Z_1' = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-6| \leq 4\}, \qquad Z_2' = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-4| \leq 3\},$$

$$Z_3' = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z+3| \leq 0.5\}, \qquad Z_4' = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 2\}.$$

Os valores próprios de A, que podem ser complexos visto que a matriz A não é simétrica, pertencem ao conjunto $Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3 \cup Z_4$ e também ao conjunto $Z_1' \cup Z_2' \cup Z_3' \cup Z_4'$. Além disso, visto que a união $Z_1 \cup Z_2$ é disjunta de $Z_3 \cup Z_4$, ambos conjuntos conexos, cada um destes dois conjuntos contém exactamente dois valores próprios de A. Mais, os conjuntos Z_3' e $Z_1' \cup Z_2' \cup Z_4'$ são disjuntos pelo que um (e apenas um) dos valores próprios de A pertence a Z_3'. Esse valor próprio tem que ser real tendo em conta que se existir um valor próprio complexo λ então o seu conjugado $\overline{\lambda}$ é também um valor próprio de A, pois a matriz A é real, e pertence ao mesmo círculo de Gerschgorin do que λ.

Portanto, um dos dois valores próprios em $Z_3 \cup Z_4$ é real e pertence ao intervalo $[-3.5, -2.5]$. Assim, existe um valor próprio em $\left(Z_1' \cup Z_2' \cup Z_4'\right) \cap \left(Z_3 \cup Z_4\right)$ e, como ele tem que ser real, pertence a $[-2, 2]$. Finalmente, existem dois valores próprios (reais ou complexos em) $\left(Z_1' \cup Z_2' \cup Z_4'\right) \cap \left(Z_1 \cup Z_2\right) = Z_1 \cup Z_2 = Z_1$.

2. Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine, **com contas exactas**, duas matrizes simétricas e ortogonais U_1 e U_2 de modo que a matriz $U_2 U_1 A$ seja uma matriz triangular superior. Obtenha ainda a decomposição QR da matriz A. **[2.0]**

Resolução: Seja $U_1 = I - 2ww^T$ uma matriz de Householder em que

$$w = \frac{v}{\|v\|_2}, \qquad v = d \pm \|d\|_2 e_1, \quad d = [0\ 0\ 2]^T, \qquad \|d\|_2 = 2, \qquad e_1 = [1\ 0\ 0]^T.$$

Portanto, $v = [2\ 0\ 2]^T$, $w = [\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ \frac{1}{\sqrt{2}}]^T$ e

$$U_1 = I_3 - 2ww^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad U_1 A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para anular o último termo da segunda coluna de $U_1 A$, definimos os vectores em $\mathbb{R}^2$:

$$d = [1\ \ -2]^T, \quad \|d\|_2 = \sqrt{5}, \quad v = [1 + \sqrt{5}\ \ -2]^T, \quad w = v / \|v\|_2.$$

Segue-se que

$$2ww^T = \frac{1}{5 + \sqrt{5}} \begin{bmatrix} 6 + 2\sqrt{5} & -2(1 + \sqrt{5}) \\ -2(1 + \sqrt{5}) & 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad U_2 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1\times 2} \\ \mathbf{0}_{2\times 1} & I_2 - 2ww^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Assim $A=QR$, em que

$$R=U_2U_1A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -\sqrt{5} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \quad Q=(U_2U_1)^T=U_1U_2=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Considere o seguinte método de passo simples implícito

$$y_{n+1}=y_n+h\,f\Big(\frac{t_{n+1}+t_n}{2},\frac{y_{n+1}+y_n}{2}\Big), \quad n=0,1,\dots,$$

onde $h=t_{n+1}-t_n$. Mostre que o método é convergente e A-estável. **[2.0]**

Resolução: O método corresponde ao método do ponto médio implícito

$$y_{n+1}=y_n+h\,k_1\,, \quad k_1=f\Big(t_n+\frac{h}{2}\,,\,y_n+\frac{h}{2}\,k_1\Big), \quad n\geq 0\,,$$

que é um método de Runge-Kutta de uma só etapa com $b_1=1, c_1=a_{11}=1/2$. O método do ponto médio implícito é consistente ($b_1=1$) e assim, sendo ele um método de passo único, é logo zero-estável e convergente.

Aplicando o método ao problema modelo $y'(t)=\lambda\,y(t)\,, y(0)=y_0, \lambda\in\mathbb{C}$, temos

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\lambda(y_{n+1}+y_n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y_{n+1}=\frac{1+\frac{\overline{h}}{2}}{1-\frac{\overline{h}}{2}}\,y_n=:R(\overline{h})\,y_n\,, \qquad \overline{h}=h\lambda\,,$$

onde $R(\overline{h})$ é a função de establidade absoluta. O método é absolutamente estável se e só se $|R(\overline{h})|<1$. Os valores de $\overline{h}\in\mathbb{C}$ para os quais $|R(\overline{h})|<1$ definem a região de estabilidade absoluta e se essa região contém todo o do semi-plano esquerdo do plano complexo o método é A-estável. Temos

$$|R(\overline{h})|<1 \quad\Leftrightarrow\quad |R(\overline{h})|^2<1 \quad\Leftrightarrow\quad 1+\mathrm{Re}\,\overline{h}+\frac{|\overline{h}|^2}{4}<1-\mathrm{Re}\,\overline{h}+\frac{|\overline{h}|^2}{4} \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{Re}\,\overline{h}<0\,,$$

ou seja, o método é A-estável.

4. Considere o seguinte método de Runge-Kutta

$$\begin{aligned} &y_{n+1}=y_n+\frac{h}{4}\Big(k_1+3\,k_2\Big), \quad n\geq 0\,, \\ &k_1=f(t_n,y_n)\,, \quad k_2=f\Big(t_n+\frac{2}{3}\,h, y_n+\frac{h}{3}\,k_1+\frac{h}{3}\,k_2\Big), \end{aligned} \tag{1}$$

Determine a ordem do método (1). Mostre que a sua função de estabilidade é dada por

$$R(z)=\frac{1+\frac{4z}{6}+\frac{z^2}{6}}{1-\frac{z}{3}}\,.$$ **[2.0]**

Resolução: O método (1) é um método de Runge-Kutta de duas etapas diagonalmente implícito com

$$b_1=\frac{1}{4}\,, \quad b_2=\frac{3}{4}\,, \quad c_1=0\,, c_2=\frac{2}{3}\,, \quad a_{11}=a_{12}=0\,, \quad a_{21}=a_{22}=\frac{1}{3}\,.$$

Temos

$$c_j=a_{j1}+a_{j2}\,, \quad j=1,2\,, \quad b_1+b_2=1\,, \quad b_1c_1+b_2c_2=0+\frac{3}{4}\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\,,$$

$$b_1c_1^2+b_2c_2^2=0+\frac{3}{4}\frac{4}{9}=\frac{1}{3}\,, \quad b_1a_{11}c_1+b_1a_{12}c_2+b_2a_{21}c_1+b_2a_{22}c_2=0+0+0+\frac{3}{4}\frac{1}{3}\frac{2}{3}=\frac{1}{6}\,.$$

Portanto a ordem do método é pelo menos 3. Por outro lado, a ordem máxima de um método de Runge-Kutta de duas etapas é 4 e existe apenas um método dessa ordem. O método de duas etapas de ordem 4 é implícito e não apenas diagonalmente implícito e os coeficientes c_1 e c_2 coincidem com os zeros do polinómio de Legendre de grau 2 em $[0,1]$. Conclui-se assim que a ordem do método é 3.

A função de estabilidade do método (1) é dada por

$$R(\overline{h}) = \frac{\det(I - \overline{h}\,A + \overline{h}\,\mathbf{1}\,b^T)}{\det(I - \overline{h}\,A)}\,, \qquad \mathbf{1} = [1 \;\; 1]^T\,, \qquad b = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}^T, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$I - \overline{h}\,A + \overline{h}\,\mathbf{1}\,b^T = \begin{bmatrix} 1 + \overline{h}/4 & 3\overline{h}/4 \\ -\overline{h}/12 & 1 + 5\overline{h}/12 \end{bmatrix}, \qquad I - \overline{h}\,A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\overline{h}/3 & 1 - \overline{h}/3 \end{bmatrix}$$

Segue-se que

$$R(\overline{h}) = \frac{\det(I - \overline{h}\,A + \overline{h}\,\mathbf{1}\,b^T)}{\det(I - \overline{h}\,A)} = \frac{1 + \frac{2\overline{h}}{3} + \frac{\overline{h}^2}{6}}{1 - \frac{\overline{h}}{3}}\,.$$

5. Considere o seguinte problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} y''(x) + \dfrac{4}{x}\,y'(x) - \dfrac{2}{x^2}\,y(x) = -\,\dfrac{2}{x^2}\,\ln x\,, \quad 1 \le x \le 2 \\[2ex] y(1) = \dfrac{3}{2}\,, \quad y(2) = \ln 2 + \dfrac{3}{2}\,. \end{cases} \tag{2}$$

Mostre que

$$\max_{j \in \{1,\ldots,n\}} |y(x_j) - y_j| \le \frac{11}{3}\,h^2\,,$$

onde $y(x)$ é a solução exacta do problema (2) e y_j é a aproximação obtida pelo método das diferenças finitas nos pontos discretos $x_j = 1 + jh, j = 0, \ldots n$, tais que $x_n = 2$. Suponha que $h = \frac{1}{n} \in (0, \frac{1}{2})$. **[2.0]**

Resolução: Note-se que o problema (2) é da forma $y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x)$ com

$$p(x) = -\,\frac{4}{x}\,, \qquad q(x) = \frac{2}{x^2}\,, \qquad r(x) = -\,\frac{2}{x^2}\,\ln x\,.$$

Para este problema linear temos a estimativa de erro (desde que $\frac{h}{2}\,|p(x_j)| \le 1 \;\forall\, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$):

$$\max_{j \in \{1,\ldots,n\}} |y(x_j) - y_j| \le h^2\,\frac{M_4 + 2P^* M_3}{12 Q_*}\,,$$

em que

$$P^* = \max_{x \in [a,b]} |p(x)|\,, \qquad q(x) \ge Q_* > 0 \;\; \forall x \in [a,b], \qquad M_k = \max_{x \in [a,b]} |y^{(k)}(x)|,\, k = 3, 4\,.$$

É fácil ver que a solução exacta do problema (2) é $y(x) = \ln x + \frac{3}{2}$. De facto

$$y'(x) = \frac{1}{x}\,, \qquad y''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad y(1) = \frac{3}{2}\,, \qquad y(2) = \ln 2 + \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad y''(x) + \frac{4}{x}\,y'(x) - \frac{2}{x^2}\,y(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^2}\,(\ln x + \frac{3}{2}) = -\,\frac{2}{x^2}\,\ln x\,.$$

Temos ainda $\frac{h}{2}\,|p(x_j)| < \frac{1/2}{2}\,4 = 1 \;\forall\, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e

$$P^* = \max_{x \in [1,2]} |p(x)| = 4\,, \qquad q(x) \ge Q_* = \frac{1}{2} > 0 \;\; \forall x \in [1,2]\,,$$

$$\max_{x \in [1,2]} |y^{(3)}(x)| = \max_{x \in [1,2]} \left|\frac{2}{x^3}\right| = 2\,, \qquad \max_{x \in [1,2]} |y^{(4)}(x)| = \max_{x \in [1,2]} \left|\frac{6}{x^4}\right| = 6\,.$$

Portanto

$$\max_{j \in \{1,\ldots,n\}} |y(x_j) - y_j| \le h^2\,\frac{M_4 + 2P^* M_3}{12 Q_*} = \frac{22}{6}\,h^2 = \frac{11}{3}\,h^2\,.$$