

Exame – 30 de Janeiro de 2010

1. Seja $u \in \mathbb{R}^N$ um vector tal que $\|u\|_2 = 1$. Mostre que

$$\|I - uu^T\|_2 = 1,$$

onde $I \in \mathbb{R}^{N \times N}$ é a matriz identidade. [1.5]

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por

$$f(x_1, x_2) = \max \{x_1 - 2x_2, x_1^4\}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Mostre que f é convexa em $\mathbb{R}^2$. [1.5]

3. Considere a seguinte equação integral não linear

$$u(t) = 1 + \frac{t}{4} \int_0^1 \frac{ds}{1 + u^2(s)} \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (1)$$

Mostre, pelo teorema do ponto fixo de Banach, que a equação (1) admite uma e uma única solução $u \in C[0, 1]$. [2.0]

4. Seja $F(x) = Ax - b$, com $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ não singular e $b \in \mathbb{R}^N$, e considere a aproximação numérica do sistema linear $F(x) = 0$ pelo método de Broyden.

a) Prove que $A \in Q(y_k, s_k) = \{B \in \mathbb{R}^{N \times N} \mid Bs_k = y_k\}$. [1.5]

b) Mostre que

$$B_{k+1} - A = (B_k - A) \left(I - \frac{s_k s_k^T}{s_k^T s_k} \right), \quad k = 0, 1, \dots,$$

onde B_k é a matriz de actualização de Broyden. Prove ainda que

$$\|B_{k+1} - A\|_2 \leq \|B_k - A\|_2. \quad [1.5]$$

5. Dado $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, considere o sistema não linear $F(x) = 0$ e o problema de minimização sem restrições

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} f(x), \quad (2)$$

onde $f(x) = \frac{1}{2} F(x)^T F(x)$. Relacione os zeros de F com os minimizantes de f . Mostre que a direcção $p_k = -J_F(x_k)^{-1} F(x_k)$ é uma direcção de descida para f em x_k , desde que $J_F(x_k)$ seja não singular e $F(x_k) \neq 0$. [2.0]

6. Considere o problema de minimização

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} (2x_1^2 - x_2)^2 + 3x_1^2 - x_2. \quad (3)$$

a) Determine os minimizantes locais e globais do problema. [1.5]

b) Considere $x^{(0)} = (1/2, 5/4)$ e calcule a aproximação $x^{(1)}$ pelo método de descida máxima com a procura exacta do comprimento do passo. [1.5]

7. Considere o problema de programação quadrática

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{2} x^T G x \quad \text{sujeito a} \quad Ax = b, \quad (4)$$

onde $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$ ($M < N$), com $\text{rank}(A) = M$, $b \in \mathbb{R}^M$ e $G \in \mathbb{R}^{N \times N}$ é uma matriz simétrica. Suponha ainda que

$$x^T G x > 0 \quad \forall x \in N(A) \setminus \{0\},$$

onde $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid Ax = 0\}$. Prove que a matriz KK^T do problema (4),

$$\begin{bmatrix} G & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+M) \times (N+M)},$$

é não singular. [2.0]

8. Considere o seguinte problema de minimização com restrições

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} x_1 \ln x_2 + e^{x_1} \quad \text{sujeito a} \quad \begin{cases} 1 \leq x_1 \leq 2 \\ 1 \leq x_2 \leq 2 \end{cases}. \quad (5)$$

a) Mostre que o ponto $x_* = (1, 1)$ satisfaz as condições KKT do problema. A condição LICQ é válida em x_* ? [1.5]

b) Prove que x_* é a solução global única do problema (5). [1.5]

9. Mostre que, dada uma matriz simétrica e definida positiva $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$x^T A x \geq c \|x\|_2^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

(Sugestão: Considere o problema de minimização

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} x^T A x \quad \text{sujeito a} \quad \|x\|_2 = 1. \quad [2.0]$$