Mestrado em Matemática e Aplicações – Instituto Superior Técnico
Análise Numérica Funcional e Optimização

Teste de Recuperação – 26 de Janeiro de 2009

1^o **Teste**

1. Seja $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ uma matriz simétrica e definida positiva e considere uma aplicação $\|\cdot\|_A$ de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}$ definida por $\|x\|_A = \sqrt{x^T A x}$. Mostre que $\|\cdot\|_A$ é uma norma em $\mathbb{R}^N$. **[2.0]**

2. Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ um funcional definido por $f(x) = \|Ax + b\|$, em que $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathbb{R}^N$, $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ e $b \in \mathbb{R}^N$. Prove que f é uma função convexa. **[1.5]**

3. Seja $V = C[0,1]$ e considere a seguinte equação integral de Volterra não linear

$$u(t) = \int_0^t \frac{4t}{1+u^2(s)}\, ds + f(t)\,, \qquad 0 \le t \le 1 \tag{1}$$

onde $f \in V$. Mostre que a equação (1) admite uma e uma única solução $u \in V$. **[2.0]**

4. Seja $Q(y_k, s_k) = \left\{B \in \mathbb{R}^{N\times N}\,|Bs_k = y_k\right\}$ e considere a seguinte modificação da fórmula de actualização do método de Broyden

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(y_k - B_k s_k)\, s_k^T + s_k (y_k - B_k s_k)^T}{s_k^T s_k} - \frac{s_k^T (y_k - B_k s_k) s_k s_k^T}{(s_k^T s_k)^2}\,. \tag{2}$$

a) Mostre que $B_{k+1} \in Q(y_k, s_k)$ e que $B_{k+1} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ é uma matriz simétrica se B_k for simétrica. **[1.5]**

b) Seja $B \in Q(y_k, s_k)$ tal que $(B - B_k)^T = B - B_k$. Prove que

$$(B_{k+1} - B_k)s_k = (B - B_k)s_k\,,$$

$$\|(B_{k+1} - B_k)t\|_2 \le \|(B - B_k)t\|_2 \qquad \forall t \in \mathbb{R}^N \ \text{ tal que } \ (t, s_k) = 0\,.$$

[1.5]

c) Prove que matriz B_{k+1} é a solução única para o problema de minimização

$$\min_{\substack{B\in Q(y_k,s_k)\\(B-B_k)^T = B - B_k}} \|B - B_k\|_F\,,$$

onde $\|\cdot\|_F$ é a norma de Fröbenius. **[1.5]**

(Sugestão: Se $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ for uma base ortonormal em $\mathbb{R}^N$ tem-se

$$\|A\|_F^2 = \sum_{j=1}^N \|A\varphi_j\|_2^2 \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{N\times N}\,.)$$

2^o **Teste**

1. Suponha que $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função convexa e continuamente diferenciável num aberto convexo D. Prove que $x_* \in D$ é um minimizante global de f se e só se $\nabla f(x_*)^T(x - x_*) \geq 0 \ \ \forall x \in D$. **[1.5]**

2. Considere o seguinte problema de minimização com restrições

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \qquad \text{sujeito a} \qquad \sum_{j=1}^{N} x_j = 1 \,, \tag{3}$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_N)$.

a) Escreva as condições KKT do problema e determine todos os pontos (x_*, λ^*) que satisfazem as condições necessárias de optimalidade de primeira ordem. **[2.0]**

b) Escreva as condições suficientes de optimalidade de segunda ordem e determine as soluções locais e globais do problema (3). **[1.5]**

c) Escreva a função de penalização quadrática $Q(x;\mu)$ para o problema (3) e calcule o gradiente $\nabla_x Q(x;\mu)$ e a matriz Hessiana $\nabla_x^2 Q(x,\mu)$ da função $Q(x;\mu)$. **[1.5]**

d) Determine o minimizante global $x_*(\mu_k)$ do problema de minimização sem restrições $\min_{x\in\mathbb{R}^N} Q(x,\mu_k)$. **[1.5]**

(Sugestão: Verifique que os valores próprios de $\nabla_x^2 Q(x,\mu_k)$ são

$$\lambda_1(\mu_k) = \ldots = \lambda_{N-1}(\mu_k) = 1 \,, \qquad \lambda_N(\mu_k) = 1 + N/\mu_k \,.)$$

e) Considere o problema de minimização da função de penalização quadrática $Q(x,\mu_1)$. Aproxime a solução do problema $\min_{x\in\mathbb{R}^3} Q(x,\mu_1)$ pelo método da descida máxima. Considere $\mu_1 = 1$, $x_0 = [0 \ \ 0 \ \ 0]^T$ e efectue duas iterações. **[2.0]**