Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Análise Numérica (Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação)

Teste de Recuperação – 21 de Dezembro de 2007

I Parte

1. Seja $f \in C^4(\mathbb{R})$ uma função tal que

$$f(0) = 1\,, \qquad f[0,0] = 0\,, \qquad f[0,1] = -2\,, \qquad f[1,1] = 4\,, \qquad f^{(4)}(x) = 4 \quad \forall x \in [0,1]\,.$$

Determine o polinómio interpolador de Hermite, $H_3(x)$, que interpola f e f' nos pontos $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$. Prove ainda que

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x) - H_3(x)| = \frac{1}{96}\,. \qquad [\mathbf{2.0}]$$

2. Determine a melhor aproximação uniforme de $f(x) = |x|$ em $\mathcal{P}_2[-2,2]$. **[2.0]**

3. Seja $T_j(x)$ o polinómio de Chebyshev de grau j, $j = 0,1,\ldots,2n+1$, e sejam

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\,\pi\right), \qquad k = 0,1,\ldots,n\,,$$

os zeros do polinómio de Chebyshev T_{n+1}. Mostre que

$$\sum_{k=0}^{n} T_j(x_k) = \begin{cases} n+1\,, & j = 0\,,\\ 0\,, & j = 1,\ldots,2n+1\,. \end{cases} \qquad [\mathbf{2.0}]$$

4. Seja $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$. Mostre que a matriz A é normal se e só se as matrizes

$$C = \frac{1}{2}\,(A + A^*)\,, \qquad B = \frac{1}{2i}\,(A - A^*)$$

comutam, i.e. $CB = BC$. **[2.0]**

5. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 & 0\\ 0.5 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 8 & 2\\ 0 & 0.25 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Localize, pelo teorema de Gerschgorin, os valores próprios de A. **[2.0]**

II Parte

1. Considere as matrizes simétricas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 8.12 & 0.16 \\ 0 & 0 & 0.16 & -0.12 \end{bmatrix}.$$

a) Prove que as matrizes A e B são ortogonalmente semelhantes. **[1.5]**

(Sugestão: Considere matrizes de Householder.)

b) Verifique, pelas sucessões de Sturm, que os valores próprios de A são tais que

$$\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3 < 10 < \lambda_4 \,.$$ **[2.0]**

2. Seja $x \in \mathbb{R}^N$. Determine os valores e vectores próprios da matriz

$$A = I - \frac{2\, x x^T}{\|x\|_2^2} \,.$$

Prove que a matriz A é invertível e calcule a sua inversa. **[1.5]**

3. Considere o seguinte método numérico para a aproximação de problemas de valor inicial

$$\begin{cases} y_{n+\theta} = y_n + h\,\theta f(t_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + h\,\theta f(t_{n+\theta}, y_{n+\theta}) \end{cases}, \tag{1}$$

onde $\theta \in [0,1]$ é um parâmetro.

a) Mostre que (1) é um método de Runge-Kutta de 2 etapas. Apresente a tabela de Butcher do método. **[1.5]**

b) Determine a ordem do método (1). **[1.5]**

c) Analise a estabilidade absoluta e A-estabilidade do método (1). Considere apenas valores reais de $\bar{h}$. **[2.0]**