Mestrado em Matemática e Aplicações – Instituto Superior Técnico
Análise Numérica Funcional e Optimização

1^o **Teste – 19 de Novembro de 2008**

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(\mathbf{x}) = \log\left(\sum_{j=1}^{N} e^{x_j}\right) , \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N) .$$

a) Prove que

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{1}^T\mathbf{z}} , \qquad H_f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{1}^T\mathbf{z}} \left(\mathbf{Z} - \frac{\mathbf{z}\mathbf{z}^T}{\mathbf{1}^T\mathbf{z}}\right) ,$$

onde $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots 1)$, $\mathbf{z} = (e^{x_1}, \ldots, e^{x_N}) \in \mathbf{R}^N$ e $\mathbf{Z} = \mathrm{diag}(e^{x_1}, \ldots, e^{x_N}) \in \mathbf{R}^{N\times N}$. **[1.5]**

b) Mostre que a função f é convexa. **[1.5]**

2. Considere a matriz $P \in \mathbb{R}^{N\times N}$ definida por

$$P = I - uu^T ,$$

onde $I \in \mathbb{R}^{N\times N}$ é a matriz identidade e $u \in \mathbb{R}^N$, com $\|u\|_2 = 1$. Prove que P e $I - P$ são matrizes de projecção ortogonal. **[2.0]**

3. Considere a seguinte equação integral

$$\lambda\, u(t) - \int_a^b \frac{u(s)}{1 + st}\, ds = f(t) , \qquad a \le t \le b , \tag{1}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $0 < a < b$ e $f \in C[a, b]$.

Mostre que existe $\lambda_0 > 0$ tal que a equação (1) admite uma e uma só solução $u \in C[a, b]$ desde que $|\lambda| > \lambda_0$. Obtenha ainda uma estimativa para $\|u\|_\infty$ em função de $\|f\|_\infty$. **[2.0]**

4. Considere a fórmula de actualização de Broyden para a inversa da matriz A_k

$$A_{k+1}^{-1} = A_k^{-1} + \frac{(s_k - A_k^{-1} y_k)\, s_k^T A_k^{-1}}{s_k^T A_k^{-1} y_k}\,, \quad k = 0, 1, \ldots\,. \tag{2}$$

Diga, justificando, se a matriz A_{k+1} é ou não é a solução para o problema de minimização

$$\min_{\substack{B \in Q(y_k, s_k) \\ B \text{ não singular}}} \|B^{-1} - A_k^{-1}\|_F\,,$$

onde $Q(y_k, s_k) = \left\{B \in \mathbb{R}^{N \times N}\, |Bs_k = y_k\right\}$. Suponha que $s_k^T A_k^{-1} y_k \neq 0$. **[1.5]**

5. Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - 3 \\ x_1 + 2x_2 - 9 \end{bmatrix}.$$

Aproxime a solução $x_* = [-3\ 6]^T$ da equação $F(x) = 0$ pelo método de Broyden. Considere

$$x_0 = [-1\ 5]^T\,, \qquad A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e efectue três iterações, sabendo que

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Comente. **[1.5]**